拡散項を伴う３種 POPULATION MODEL の解析について

大屋 博一 (早稲田大学 理工学部)

本講演では、関岡直樹氏 (早稲田大学大学院理工学研究科) の修士論文における結果を紹介する。

次の 3 種 population model(P) に対する正値解の存在や安定性を議論する。

$$
(\mathrm{P})\begin{cases}
u_t = \Delta u + u(1-u-kv) & \text{in } \ \Omega\times(0,\infty),\\
v_t = \Delta v + v(1-lu-v+mw) & \text{in } \ \Omega\times(0,\infty),\\
w_t = \Delta w + dw(1-nv-w) & \text{in } \ \Omega\times(0,\infty),\\
\dfrac{\partial u}{\partial\nu}=\dfrac{\partial v}{\partial\nu}=\dfrac{\partial w}{\partial\nu}=0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,\infty),\\
u(\cdot,0)=u_0(\cdot)\ge 0, v(\cdot,0)=v_0(\cdot)\ge 0, w(\cdot,0)=w_0(\cdot)\ge 0.
\end{cases}
$$

ここで d, k, l, m, n は全て正定数とする。また $\Omega\subset\mathbf{R}^N$ は境界が滑らかな有界領域とする。3 種の生物の役割を表す反応項について、種 w は種 v との関係が捕食者—被捕食者の関係になる反面、種 u との直接の関係はないように反応項を選んでいることに注意する。問題 (P) において、$w\equiv 0$ と置くと u, v の競争する 2 種によるシステムに帰着され、係数 (ここでは k と l がそれに対応する) の大小関係により種の共存あるいは絶滅などを分類することが出来る。さらに問題によっては安定多様体や不安定多様体なども構成でき、より詳しい解の挙動を考察することが出来る。このように、2 種の生物種に対する数理モデルに関してはより多くの研究により詳細な解構造が示されている。このような 2 種の生物種モデルに第 3 種目を加えることにより、その第 3 種目の効果が解構造に対しどのように影響を及ぼすのかを考察することは自然なことであり、また重要なことである。本講演では特に問題 (P) の正値定数定常解

$$
\hat{u}_p := (\hat{u},\hat{v},\hat{w}) = \left(\frac{1+mn-k-km}{1+mn-kl}, \frac{1-l+m}{1+mn-kl}, \frac{1+nl-kl-n}{1+mn-kl}\right)
$$

からの非定数正値解の分岐について考えていきたい。具体的なテーマとしては問題 (P) の第 3 式にある係数 d をパラメータと見たときの正値定数定常解の安定性、および正値定数定常解からの Hopf 分岐などについて述べていきたい。

まずはじめに問題 (P) の正値定数定常解が存在するための条件は $m > l-1$, $n > k$, $kl < 1+n(l-1)$ である。この条件は大雑把に考えると 3 種の種間の影響力について、w が v に及ぼす効果が u が v に及ぼす効果よりも強いが w は v によって強く増加を抑えられている、という状況に対応すると考えてよい。ここで定理を述べる前にいくつか記号を導入する。

まず、$0=\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2\cdots$ を同次ノイマン境界条件の下での $-\Delta$ の固有値とし、すべて単純であると仮定する。これを用いて d_i^*, d_j^{**} $(i,j=1,2,\cdots)$ を次のように定義する。

$$
d_i^* = \frac{-S_2+\sqrt{S_2^2-4S_1S_3}}{2S_1},\ \ d_j^{**} = \frac{-\alpha_i^3-\alpha_i^2(\hat{u}-\hat{v})+\alpha_i(kl-1)}{\hat{w}[\alpha_i^2+\alpha_i\{\hat{u}+\hat{v}(1+mn)\}+\hat{u}\hat{v}(1+mn-kl)]}.
$$

ただし $A=\alpha_i+\hat{u},\ B=\alpha_i+\hat{v}$ として

$$S_1=\hat{w}^2(A+B+mn\hat{v}),\quad S_2=\hat{w}\{\alpha_i(2A+2B+mn\hat{v})+(A+B)^2+Bmn\hat{v}\},$$

$$S_3=(A+B)(AB-kl\hat{u}\hat{v})+2\alpha_i(AB-kl\hat{u}\hat{v})+\alpha_i^2(A+B).$$

ここで α_i の単調性から $d_i^*>0,\ d_j^{**}>0$ を満たす $i,\ j$ はそれぞれ有限個であることが確認できる。このことを踏まえ $d^*=\max\{\{d_i^*\}_i,\{d_j^{**}\}_j\}<+\infty$ として定義し、$d_i^*,\ d_j^{**}$ は重複または一致しないものと仮定すると次の定理が成り立つ。

Theorem 1 (正値定数定常解 $\hat{\mathbf{u}}_p$ の安定性).
(a) $1>kl$ の場合 $\hat{\mathbf{u}}_p$ は $d>0$ で安定である。
(b) $1<kl$ の場合 $\hat{\mathbf{u}}_p$ は $d>d^*$ で安定であり、$0<d<d^*$ で不安定である。

上記の定理において、(a) の場合は u または v の効果が支配的となり、また (b) の場合は特に $d>0$ の値が大きければ w の効果が支配的となりそれぞれ定数定常解の安定性を保証している。しかしながら (b) の場合で特に $d>0$ が小さいときは 3 種のバランスが微妙となり定数定常解が不安定となる。実際、(b) の条件下においては次が成立する。

Theorem 2 ($\hat{\mathbf{u}}_p$ からの分岐解の存在)
(i) $d_i^*>0$ をみたす d_i^* は有限個である。ここで $d_i^*>0$ をみたす番号 i のうちで最大のものを i^* とすれば $0\le i\le i^*$ をみたすすべての i に対して $d=d_i^*$ において正値定数定常解 $\hat{\mathbf{u}}_p$ から Hopf 分岐がおきる。
(ii) $d_j^{**}>0$ をみたす d_j^{**} は有限個である。ここで $d_j^{**}>0$ をみたす番号 j のうちで最大のものを j^* とすれば $0\le j\le j^*$ をみたすすべての j に対して $d=d_j^{**}$ において正値定数定常解 $\hat{\mathbf{u}}_p$ から分岐がおきる。

上記の定理を述べるため (すなわち安定性を議論するため) に固有値問題を考える必要がある。このような問題に対しては Fourier 級数展開を用いることにより対応する 3 次方程式を解析すればよいことがわかる。ここでは単純固有値に対する分岐を考えるために Crandalland-Rabinowitz [1]-[3] に即して議論を進める。これらの議論を適用するために、ノイマン境界条件における $-\Delta$ の固有値に対する単純性と対応する d_i^* および d_j^{**} がすべて一致・重複しない、という仮定の下で考察している。しかしながら反応項にある係数や固有値 α_i の関係により d_i^* や d_j^{**} が一致・重複する場合も考えられる。こういったことは対応する固有値が上記の 3 次方程式によって支配されるという事実に大きく関係している。このように問題に応じては分岐点において単純でない固有値を扱う場合も生じるが、今後はこのような固有値からの分岐解析を行っていきたい。

References

[1] M. G. Crandalland P. H. Rabinowitz, *The Hopf bifurcation theorem in infinite dimensions*, Arch. Rational Mech. Anal. **67** (1977), 53-72.

[2] M. G. Crandalland P. H. Rabinowitz, *Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues and linearized stability*. Arch. Rational Mech. Anal. 52 (1973), 161-180.

[3] M. G. Crandalland P. H. Rabinowitz, *Bifurcation from simple eigenvalues*, J. Functional Analysis **8** (1971), 321-340.

〒 169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1
URL: http://www.aoni.waseda.jp/ohya/
E-mail address: ohya@aoni.waseda.jp