

破壊現象の数理モデル

大塚 厚二 (広島国際学院大学 情報学部)

1. はじめに

製造工程や加工において無視できない不連続面(亀裂)が存在する. この初期亀裂 \mathcal{C} が危険であることは少なく, 外力や熱応力, 体積力などの繰返しによる亀裂の安定成長 $\mathcal{C}(t)$ が危険な寸法 $\mathcal{C}(t_0) = \mathcal{C}_c$ に成長することで脆性破壊と呼ばれる不安定成長が起きる(例えば [2] 参照). ここでは, 物体が線形弾性変形理論の範囲内で破断に至る脆性破壊現象の数理モデルについて概略を述べる. 詳細は “<http://grb.cs.hkg.ac.jp/~ohtsuka/>” で見ていただきたい.

2. 滑らかな亀裂進展

議論を単純にするため不連続面は2つの媒介変数 y_1, y_2 によって

$$\mathcal{C} = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid x = \vec{\psi}(y_1, y_2), \vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3), (y_1, y_2) \in D\}$$

と表現でき, 亀裂静止形状, 亀裂縁および時間 t に関して C^∞ 級であるとする. 以下の議論は, 局所座標系を取ることで一般的な曲面でも同様な議論が展開できる. ここで, D は滑らかな縁をもつ2次元領域である. 曲面 \mathcal{C} を含む曲面 $S = \{x \mid x = \vec{\psi}(y_1, y_2), (y_1, y_2) \in D_0\}$, $D \subset D_0$ に沿って亀裂は進展すると仮定する ($S \subset \Omega$).

\mathcal{C} の曲面 S 上の滑らかな亀裂進展 $\Pi(\mathcal{C} \mid S)$ を次で定義する.

(SC1): 初期亀裂先端 $\partial\mathcal{C}$ の点 γ ($t = 0$) が, 時刻 $t > 0$ に仮想亀裂の先端 $\partial\mathcal{C}(t)$ の点 $\phi(t, \gamma)$ に移ったと考える. 写像 $\phi(t) : \gamma \mapsto \phi(t, \gamma)$ は時刻 t についても, 亀裂縁の点 γ に関しても滑らかで, 1対1であるとする.

(SC2): 亀裂は進展している ($\lim_{t \rightarrow +0} t^{-1} |\mathcal{C}(t) - \mathcal{C}| \neq 0$).

弧長 s を媒介変数として, 亀裂縁は $\partial\mathcal{C} = \{\vec{\psi}(s) \mid 0 \leq s \leq L_c\}$,

$$\vec{\psi}(s) = (\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s)), \quad \psi_i(s) = \psi_i(y_1(s), y_2(s)), \quad i = 1, 2, 3$$

の形に表現されているとする. 点 $x \in S$ における S の単位法線ベクトル $\vec{\nu}$ 及び $\gamma \in \partial\mathcal{C}$ における接ベクトル $\vec{\psi}'(\gamma)$, $\gamma = \vec{\psi}(s_0)$ を

$$\vec{\nu}(x) = \frac{\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial y_1}(x) \times \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial y_2}(x)}{\left| \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial y_1}(x) \times \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial y_2}(x) \right|}, \quad \vec{\psi}'(\gamma) = \frac{d\vec{\psi}}{ds}(s_0)$$

で定義する. 点 $\gamma \in \partial\mathcal{C}$ において, $\vec{e}_2(\gamma) = \vec{\nu}(\gamma)$, S の接ベクトル $\vec{e}_1(\gamma)$ を \mathcal{C} に対して外向単位ベクトルで $\vec{e}_2(\gamma)$ と $\vec{\psi}'(\gamma)$ とに垂直に取り, $\vec{e}_3(\gamma)$ を $\vec{\psi}'(\gamma)$ または $-\vec{\psi}'(\gamma)$ に等しく取ることで $\{\vec{e}_1(\gamma), \vec{e}_2(\gamma), \vec{e}_3(\gamma)\}$ が直交座標系となるようにできる. 曲面 S の $\vec{\nu}$ 方向を+, 反対面を-と向き付けておく.

亀裂縁の点 $\gamma \in \partial\mathcal{C}$ でのベクトル $\phi'(0, \gamma)$ の $\vec{e}_1(\gamma)$ 成分を点 γ における亀裂進展速度と呼び $V_c(\gamma)$ で表す. すなわち $V_c(\gamma) = \phi'(0, \gamma) \cdot \vec{e}_1(\gamma)$ で, $V_c(\gamma)\vec{e}_1(\gamma)$ を亀裂縁 $\partial\mathcal{C}$ における亀裂進展速度場と呼ぶことにする. 次が成り立つ [1].

$$|V_c| = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{-1} |\mathcal{C}(t) - \mathcal{C}|, \quad |V_c| = \int_0^{L_c} V_c(\vec{\psi}(s)) d\gamma(s), \quad V_c \geq 0,$$

3. 変分問題

変位ベクトル $\vec{u}(t)$ はエネルギー汎関数

$$(1) \quad \mathcal{E}(\vec{v}; \mathcal{L}, \Omega_{\mathcal{C}(t)}) = \int_{\Omega_{\mathcal{C}(t)}} \left\{ E(\vec{v}) - \vec{f} \cdot \vec{v} \right\} dx - \int_{\Gamma_N} \vec{g} \cdot \vec{v} ds$$

を関数空間

$$V(\Omega_{\mathcal{C}(t)}) = \{ \vec{v} \in H^1(\Omega_{\mathcal{C}(t)})^3 \mid \Gamma_D \text{ で } \vec{v} = 0 \}$$

で最小にする元として求まる．ここで， $\varepsilon_{ij}(\vec{v}) = (\partial_j v_i + \partial_i v_j)/2$ ， $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ は微小歪， $E(\vec{v}) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\vec{v}) \varepsilon_{kl}(\vec{v})$ は歪エネルギー密度関 Lax-Milgram 定理と Korn の不等式により最小元の存在が言える [1] ..

仮想的な亀裂進展 $\mathcal{C}(\cdot) \in \Pi(\mathcal{C}|S)$ を考える．亀裂進展部分 $\mathcal{C}(t) \setminus \mathcal{C}$ では $[[\vec{v}]] = 0$ なので $\vec{v} \in H(\Omega_{\mathcal{C}})$ となり，包含関係 $H(\Omega_{\mathcal{C}}) \subset H(\Omega_{\mathcal{C}(t)})$ が成り立ち，初期亀裂状態 \vec{u} と仮想亀裂進展後の状態 $\vec{u}(t)$ とにエネルギー不等式

$$(2) \quad \mathcal{E}(\vec{u}; \mathcal{L}, \Omega_{\mathcal{C}}) = \min_{\vec{v} \in V(\Omega_{\mathcal{C}})} \mathcal{E}(\vec{v}; \mathcal{L}, \Omega_{\mathcal{C}}) \geq \min_{\vec{w} \in V(\Omega_{\mathcal{C}(t)})} \mathcal{E}(\vec{w}; \mathcal{L}, \Omega_{\mathcal{C}(t)}) = \mathcal{E}(\vec{u}(t); \mathcal{L}, \Omega_{\mathcal{C}(t)})$$

が成り立つ．エネルギー差 $\mathcal{E}(\vec{u}; \mathcal{L}, \Omega_{\mathcal{C}}) - \mathcal{E}(\vec{u}(t); \mathcal{L}, \Omega_{\mathcal{C}(t)})$ が亀裂を成長させるエネルギーであるという Griffith の考えを，Irwin が改良して，亀裂進展における単位面積増加あたりのエネルギー解放量

$$(3) \quad \mathcal{G}(\mathcal{L}, \mathcal{C}(\cdot)) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\mathcal{E}(\vec{u}; \mathcal{L}, \Omega_{\mathcal{C}}) - \mathcal{E}(\vec{u}(t); \mathcal{L}, \Omega_{\mathcal{C}(t)})}{|\mathcal{C}(t) \setminus \mathcal{C}|}$$

を亀裂進展力と考えてエネルギー解放率と呼ぶことにした．ここで， $|\mathcal{C}(t) \setminus \mathcal{C}|$ は曲面 $\mathcal{C}(t) \setminus \mathcal{C}$ の面積を表す．

定理 3.1. 仮想亀裂進展 $\mathcal{C}(\cdot) \in \Pi(\mathcal{C}|S)$ に対し

$$(4) \quad \mathcal{G}(\mathcal{L}, \mathcal{C}(\cdot)) = J_{\omega}(\vec{u}, \vec{X}_{\mathcal{C}}) |\mathcal{V}_{\mathcal{C}}|^{-1}$$

ここで， $\omega \subset U(\partial\mathcal{C})$ は亀裂縁 $\partial\mathcal{C}$ を含む開近傍で， $\vec{X}_{\mathcal{C}} = (X_{\mathcal{C}}^1, X_{\mathcal{C}}^2, X_{\mathcal{C}}^3)$ は亀裂進展速度場を $U(\partial\mathcal{C})$ において亀裂面及びその垂直方向に平行移動して拡張したベクトル場．一般 J 積分 $J_{\omega}(\vec{u}, \vec{X}_{\mathcal{C}})$ を次で定義する．

$$(5) \quad \begin{aligned} J_{\omega}(\vec{u}, \vec{X}_{\mathcal{C}}) &= P_{\omega}(\vec{u}, \vec{X}_{\mathcal{C}}) + R_{\omega}(\vec{u}, \vec{X}_{\mathcal{C}}) \\ P_{\omega}(\vec{u}, \vec{X}_{\mathcal{C}}) &= \int_{\partial\omega} \left\{ E(x, \vec{u})(\vec{X}_{\mathcal{C}} \cdot \vec{n}) - \sigma_{ij}(\vec{u}) n_j (\vec{X}_{\mathcal{C}} \cdot \nabla u_i) \right\} ds, \\ R_{\omega}(\vec{u}, \vec{X}_{\mathcal{C}}) &= \int_{\omega \cap \Omega_{\mathcal{C}}} \left\{ \sigma_{ij}(\vec{u}) \partial_j X_{\mathcal{C}}^k \partial_k u_i - (\vec{X}_{\mathcal{C}} \cdot \nabla_x) E(x, \vec{u}) \right. \\ &\quad \left. - \vec{f}(\vec{X}_{\mathcal{C}} \cdot \nabla \vec{u}) - E(x, \vec{u}) \operatorname{div} \vec{X}_{\mathcal{C}} \right\} dx. \end{aligned}$$

ここで， $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ は $\partial\omega$ の外向き単位法線ベクトルである．

REFERENCES

- [1] Ohtsuka, K., Generalized J-integral and three dimensional fracture mechanics I, Hiroshima Math. J., 11(1981), 21-52.
- [2] 岡村弘之, 線形破壊力学入門, 培風館, 1976.
E-mail address: ohtsuka@hkg.ac.jp