DRIFT-DIFFUSION 型モデルの解の減衰評価と漸近挙動について

小林　遼 (九州大学大学院数理学府)

本講演では、次のような非線形偏微分方程式系を考察する。

$$
\begin{cases} u_t - \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla \psi) = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ v_t - \Delta v - \nabla \cdot (v \nabla \psi) = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ \Delta \psi = u - v. \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1}
$$

ここで、$u = u(x,t), v = v(x,t)$ はそれぞれ電子及び正孔密度である。また、ψ は静電場のポテンシャルである。この方程式は半導体デバイスシミュレーションの最も単純なモデルであり、さらに数学的に理想化している。
初期条件を

$$
u(x,0) = u_0(x),\ v(x,0) = v_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{2}
$$

とする。さらに、次を仮定する。

$$
u_0(x) \geq 0,\ v_0(x) \geq 0. \tag{3}
$$

この初期値問題 (1),(2),(3) の大域解の存在は [1] で示されている。そこで、我々はこの解の L^p 減衰評価およびその漸近挙動について調べた。解の L^p 減衰評価はすでに [5] によって研究されているが、我々は次元 $n \geq 1$ に対して、[3] を参考にエネルギー法を用いて示した。また、解の漸近挙動についてもすでに [2] によって研究されているが、我々は $n = 3, 4$ に対してより最適な評価を得た。

Theorem.1 [u, v の L^p 減衰評価]

次元 $n \geq 1,\ 2 \leq p < \infty$ とする。u, v が初期値問題 (1),(2),(3) の解のとき、$u_0, v_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ ならば、任意の $1 \leq q \leq p$ に対して、p, q, n に依存するある正数 C が存在して次が成り立つ。

$$
\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \|v\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C E_0 (1+t)^{-\gamma}.
$$

ただし、$\gamma = \frac{n}{2}(1 - \frac{1}{q}),\ E_0 = \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|v_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ である。

Corollary [u, v の L^∞ 減衰評価]

次元 $n \geq 2$ とする。u, v が初期値問題 (1.1),(1.2),(1.3) の解のとき、$u_0, v_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ならば、n のみに依存する正数 C が存在して次が成り立つ。

$$
\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 E_0 t^{-\frac{n}{2}}.
$$

ただし、$E_0 = \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},\ C_1 = C\,(1 + E_0)$ である。

Theorem.2 [$\nabla u, \nabla v$ の L^p 減衰評価]

次元 $n \geq 2$ とする。u, v が初期値問題 (1),(2),(3) の解のとき、$u_0, v_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ならば、任意の $2 \leq q < \infty$ に対して、q, n に依存するある正数 C が存在して次が成り立つ。

$$
\|\nabla u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla v\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 E_0 t^{-\frac{1}{2}} (1+t)^{-\gamma}.
$$

ただし、$\gamma = \frac{n}{2}(1-\frac{1}{q})$, $E_0 = \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, $C_2 = C\left(1 + E_0 + E_0^{2(1+\frac{2}{q})}\right)$ である。

次に、初期値問題 (1),(2),(3) の解 u, v の漸近挙動について考察した。

$$w_u(x,t) := M_u G(x,t+1),$$
$$w_v(x,t) := M_v G(x,t+1).$$

ただし、$G(x,t) = (4\pi t)^{-n/2}\exp(-|x|^2/4t)$ は n 次元の熱核、$M_u = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\,dx, M_v = \int_{\mathbb{R}^n} v_0(x)\,dx$ である。
このとき、解 u, v が w_u, w_v に漸近しながら減衰していることを上の結果を用いて示す。

Theorem.3 [u, v の漸近挙動]

次元 $n \geq 3$ とする。u, v が初期値問題 (1),(2),(3) の解のとき、$u_0, v_0 \in L_1^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ならば、任意の $1 \leq q \leq \infty$ に対して、ある正数 C が存在して次が成り立つ。ただし、$L_1^1(\mathbb{R}^n) := \{\, f \mid xf(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$ である。

$$\|u - w_u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \|v - w_v\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \begin{cases} Ct^{-\gamma-\frac{1}{2}}\,\log(2+t)\,. & (n=3,\ q=1) \\ Ct^{-\gamma-\frac{1}{2}}\,. & \begin{pmatrix} n=3,\ 1<q\leq\infty, \\ \mathit{or} \\ n\geq 4,\ 1\leq q\leq\infty \end{pmatrix} \end{cases}$$

ただし、$\gamma = \frac{n}{2}(1-\frac{1}{q})$ である。

References

[1] M. Kurokiba and T. Ogawa, L^p wellposedness for the drift-diffusion system arising from the semiconductor device simulation, *preprint*.
[2] P. Biler and J. Dolbeault, Long time behavior of solutions to Nernst-Planck and Debye-Hückel drift-diffusion systems, *Annales Henri Poincaré*, **1** (2000) 461-472.
[3] S. Kawashima, S. Nishibata and M. Nishikawa, L^p energy method for multi-dimensional viscous conservation laws and application to the stability of planar waves, *JHDE*, **1** (2004), 581-603.
[4] 儀我　美一・儀我　美保,「非線形偏微分方程式」, 共立出版 (1999).
[5] 岡本　竜太郎, Drift-diffusion 型偏微分方程式系の解に対する $L^p - L^q$ 型時間減衰評価について, 九州大学大学院数理学府修士論文 (2004).

E-mail address: ma205043@math.kyushu-u.ac.jp