LIFE SPAN OF SOLUTIONS OF SUPERLINEAR HEAT EQUATION

佐藤 翔大　(東北大学大学院理学研究科数学専攻)

本講演では、次の半線型熱方程式の初期値-境界値問題

$$
\text{(P)}\begin{cases} u_t(x,t) = \Delta u(x,t) + f(u(x,t)) & in \quad \Omega \times (0,\infty), \\ u(x,t) = 0 & on \quad \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \rho\varphi(x) & in \quad \Omega \end{cases}
$$

を考える．ここで、Ω は R^N のなめらかな有界領域、$\rho > 0$ はパラメーター、$\varphi(x)$ は $\overline{\Omega}$ 上の非負連続関数、$f(u)$ は $[0,\infty)$ 上の非負連続関数である．この問題に対し、解の life span の $\rho \to \infty$ における漸近挙動を考える．ここで、解の life span とは、古典解での最大存在区間、すなわち、初めて爆発する時間とする．

常微分方程式の life span と異なり、一般に、偏微分方程式の life span は陽に求めることは困難である．そこで本論文では、初期値が大きいという条件下でその挙動を考える．以下では、ρ を十分大きなパラメーターとし、(P) の解の life span を $T(\rho)$ と表す．

非線型項 $f(u)$ および初期値 $\varphi(x)$ に対しては、

$$
\text{(A)}\begin{cases} \varphi(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}),\ M \overset{\text{def}}{=} \max_{x\in\bar{\Omega}} \varphi(x) > 0,\ \varphi(x)|_{\partial\Omega} = 0, \\ f(u) \in C^2((0,\infty)) \cap C([0,\infty)),\ f(u),\ f'(u),\ f''(u) > 0\ for\ \forall u > 0, \\ \int_1^\infty \frac{1}{f(u)} du < \infty \end{cases}
$$

を仮定し、また、

$$
F(u) := \int_u^\infty \frac{1}{f(z)} dz
$$

と定める．

仮定 (A) より、$\lim_{u\to\infty} f(u)/u = \infty$ が成り立つので、$\rho \to \infty$ とすると、

$$
u_t(x,0) = \rho\Delta\varphi(x) + f(\rho\varphi(x))
$$

において、$\rho\Delta\varphi(x)$ に比べて $f(\rho\varphi(x))$ が大きくなる．従って、ρ が大きいとき、拡散項より非線型項が強くなると考えられる．これを踏まえると、拡散項を消去した常微分方程式 $z_t = f(z)\ (t > 0), z(0) = M$ の解の life span $F(\rho M)$ が大きく関係すると考えられる．実際、$T(\rho)$ について次のことが成り立つ．

定理 1. $f(u),\ \varphi(x)$ が (A) を満たすとする．このとき、

$$
T(\rho) = F(\rho M) + o(F(\rho M))\ as\ \rho \to \infty
$$

となる．

これは、(P) の解の life span が $\rho \to \infty$ のとき、常微分方程式 $z_t = f(z)\ (t > 0), z(0) = M$ の解の life span $F(\rho M)$ に近づくことを示している．言い換えれば、ρ が十分大きいとき、life span に対して、非線型項 $f(u)$ と比べて拡散の効果が小さくなり、拡散の効果は漸近展開の高次の項として現れると考えられる．実際、次の結果が成立する．

定理 2. $f(u),\ \varphi(x)$ が (A) を満たすとする．$\varphi(x)$ が有限個の点でのみ最大となり、すべての最大点 $a \in \Omega$ に対して、

$$
(D^2\varphi(a)x, x) < 0\ for\ \forall x \in R^N
$$

を満たし、$f(u)$ が任意の $\beta > 0$ に対して、

$$\lim_{u\to\infty}\frac{u^{1+\beta}f'(u)}{f(u)^{1+\beta}} = 0$$

を満たし、ある $\alpha > 2$ が存在して、十分大きな u に対して、

$$\frac{d}{du}\Big(\frac{f(u)}{u\log u^{\alpha}}\Big) \geq 0$$

が成り立つとする. このとき、

$$T(\rho) = F(\rho M) + \min_{\varphi(a)=M}|\Delta\varphi(a)|\rho f(\rho M)^{-1}F(\rho M) + o(\rho f(\rho M)^{-1}F(\rho M)) \quad as \quad \rho\to\infty$$

となる.

このように、第 2 項に $|\Delta\varphi(a)|$ が現れており、拡散の効果が $\rho\to\infty$ の life span $T(\rho)$ に影響していることがわかる.

次に、$\varphi(x)$ の peak が平坦な場合を考えると、高次項はより小さくなる.

定理 3. $f(u),\ \varphi(x)$ が (A) を満たし、ある $a \in \Omega, d > 0$ に対して、

$$\varphi(x) \equiv M\ on\ \{x\in R^n; |x-a| \leq d\} \subset \Omega$$

を満たすとする. このとき、ある定数 $C > 0$ を用いて、

$$T(\rho) = F(\rho M) + o(\exp(-CF(\rho M)^{-1}))\ as\ \rho\to\infty$$

となる.

以上の結果を証明するために、supersolution と subsolution を構成して、それらの life span を評価する. すると、比較原理により、$T(\rho)$ は supersolution の life span により下から、subsolution の life span により上から抑えられる. 定理の証明に必要な supersolution と subsolution の構成は、非線型項が u^p である半線型熱方程式の life span に関する論文 [1],[2] の手法を一般化し、拡散項を消去した常微分方程式の解と非線型項を消去した熱方程式の解を用いる.

References

[1] N. Mizoguchi and E. Yanagida, *Life Span of Solutions with Large Initial Data in a Semilinear Prabolic Equation*, Indiana Univ. Math. J. 50, no. 1, (2001), P591–610

[2] N. Mizoguchi and E. Yanagida, *Life Span of Solutions for a Semilinear Parabolic Problem with Small Diffusion*, J. Math. Anal. Appl. 261, 350–368 (2001)