リプシッツ関数を初期値とした場合のナヴィエ・ストークス方程式の可解性

澤田 宙広 (早大理工、学振 PD)

本講演では Matthias Hieber 先生（ダルムシュタット工科大学)、Abdelaziz Rhandi 先生（マラケッシュ大学）との共同研究 [1] を報告する。

全空間 $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ での 非圧縮粘性 Navier-Stokes 方程式の初期値問題は次で与えられる。

$$\text{(NS)} \qquad \begin{cases} U_t - \Delta U + (U,\nabla)U + \nabla P = 0, & \nabla \cdot U = F \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T), \\ U|_{t=0} = U_0 & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

ここで $U = (U^1(x,t),\ldots,U^n(x,t))$，$P = P(x,t)$ がそれぞれ流速ベクトル、圧力を表す未知関数である。初期速度 $U_0 := (U_0^1(x),\ldots,U_0^n(x))$ と外力 $F = (F^1(x,t),\ldots,F^n(x,t))$ は与えられたベクトル値関数であり、$\nabla \cdot U_0 = 0$ と $\nabla \cdot F = 0$ を満たす（両立条件)。

外力 F に適当な仮定を課し、初期速度 U_0 を $L^n_\sigma(\mathbb{R}^n)$ の関数として与えた時の滑らかな解の時間局所存在と、$\|U_0\|_n$ が十分小さい場合の時間大域存在は既知である。滑らかな時間局所解の存在は、L^p （ただし $p > n$）や L^∞ などでも証明されている。そこで今回は、滑らかな解の時間局所存在定理が証明できる初期速度場の限界を探って行きたい。

１次元のモデルケース（Burgers 方程式）などの考察から、初期速度場が空間無限遠で１次増大している時が、その限界ではないかと推察される。例えば [2] 等を参照。そこで $\underline{U_0(x) := u_0(x) - f(x)}$ として与えて、滑らかな解の時間局所存在定理を導こう。ここで $u_0 \in L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$ とし、f は globally Lipschitz 関数で次の３つの条件を満たすものとする：

$$\begin{aligned} &(H1) \qquad \nabla \cdot f = 0, \\ &(H2) \qquad \Delta f \in L^p_\sigma, \\ &(H3) \qquad \exists \Pi : \text{ scalar function s.t.} \quad (f,\nabla)f = \nabla \Pi. \end{aligned}$$

(U,P) を (NS) の古典解とすると、$u := U + f$ と $\tilde{P} := P + \Pi$ は次の解となる。

$$\begin{cases} u_t - \Delta u - (f,\nabla)u + (u,\nabla)u - (u,\nabla)f + \nabla\tilde{P} = \tilde{F}, & \nabla \cdot u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T), \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

ここで $\tilde{F} := F - \Delta f$ とした。

鍵となるのは半群の理論である。作用素 A を $Au := -\Delta u - (f,\nabla)u + (u,\nabla)f$ と定める。定義域を $D(A) := \{u \in W^{2,p} \cap L^p_\sigma; (f,\nabla)u \in L^p\}$ で定める。この時、任意の $p \in (1,\infty)$ に対し、$-A$ は $L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$ 上 (C_0)-半群を生成する事が知られている。例えば [3] や [4] などを参照。ただし、半群 $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$ は非解析的である。更に射影 $\mathbb{P} := (\delta_{ij} + R_iR_j)_{1\leq i,j\leq n}$（ただし $R_i := \partial_i(-\Delta)^{-1/2}$） とし、Duhamel の原理から積分方程式

$$\text{(INT)} \qquad u(t) = u_1(t) - \int_0^t e^{-(t-s)A}\mathbb{P}(u(s),\nabla)u(s)ds + 2\int_0^t e^{-(t-s)A}\mathbb{P}(u(s),\nabla)f ds$$

を導く。ただし $u_1(t) := e^{-tA}u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A}\tilde{F}(s)ds$ として与える。(INT) の解を mild solution と呼ぶ事にする。

定理 1. $n \geq 2$、$p \in [n,\infty)$、$q \in [p,\infty]$ とする。$u_0 \in L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$ とする。f は *globally Lipschitz* 関数で、仮定 $(H1),(H2),(H3)$ を満たすとする。$F \in C([0,\infty);L^p_\sigma(\mathbb{R}^n))$ とする。このとき 時刻 $T_0 > 0$ と *mild solution* $u(t)$ が $t \in (0,T_0)$ 上、次のクラスで一意に存在する。

$$[t \mapsto t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}u(t)] \in C([0,T_0);L^q_\sigma(\mathbb{R}^n)),$$
$$[t \mapsto t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})+\frac{1}{2}}\nabla u(t)] \in C([0,T_0);L^q(\mathbb{R}^n)).$$

注意. $f(x) = Mx$、ただし M が $n \times n$ 行列の場合は、[5] で証明されている。すなわち、定理１は [5] の結果の一般化になっている。

定理１は縮小写像の原理（即ち逐次近似法）により証明される。その際に、次の不等式の用意が重要となる：任意の $n \geq 1$、$1 \leq p \leq q \leq \infty$ に対し、定数 $C > 0$ と $\omega \in \mathbb{R}$ があって

$$\|\nabla^k e^{-tA}f\|_q \leq Ce^{\omega t}t^{-\frac{k}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|f\|_p$$

が任意の $t > 0$ と $k = 0,1$ と $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ で成り立つ。さらに $p < q$ のとき、

$$t^{\frac{k}{2}+\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|\nabla^k e^{-tA}f\|_q \to 0 \qquad \text{as} \quad t \to 0$$

も成り立つ。

逐次近似法とは次の様にして解を構成する方法である。例えば $p = n$ とし、$\delta \in (0,1)$ を固定する。$j \geq 2$ に対し、関数列 $\{u_j\}$ を

$$u_{j+1}(t) := u_1(t) - \int_0^t e^{-(t-s)A}\mathbb{P}(u_j(s),\nabla)u_j(s)ds + 2\int_0^t e^{-(t-s)A}\mathbb{P}(u_j(s),\nabla)f ds$$

で定義する。アプリオリ評価により、ある $T_1 > 0$ があって、$t^{\frac{1-\delta}{2}}\|u_j(t)\|_{n/\delta}$ と $t^{\frac{1}{2}}\|\nabla u_j(t)\|_n$ が $t \leq T_1$ と $j \geq 1$ で一様に有界である事が言える。この一様有界性を用いると、$\{[t \mapsto t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{q})}u_j(t)]\}_{j\geq 1}$ が $C([0,T_1];L^q_\sigma)$ で、また $\{[t \mapsto t^{\frac{1}{2}+\frac{n}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{q})}\nabla u_j(t)]\}_{j\geq 1}$ が $C([0,T_1];L^q)$ でコーシー列になる事が示せる。この収束極限が mild solution となる。一意性は Gronwall の不等式から従う。

参考文献.

[1] M. Hieber, A. Rhandi and O. Sawada, (preprint).
[2] Y. Giga and K. Yamada, Bol. Soc. Paran. Mat., **20** (2002), 29-49.
[3] G. Metafune, D. Pallara and V. Vespri, Houston J. Math., **31** (2005), 605-620.
[4] A. Lunardi and G. Metafune, Differential Integral Equations, **17** (2004), 73-97.
[5] M. Hieber and O. Sawada, Arch. Ration. Mech. Anal., **175** (2005), 269-285.