BLOW-UP DIRECTIONS FOR QUASILINEAR PARABOLIC EQUATIONS

関　行宏 (東大・数理)

次のような準線形放物型方程式に対する初期値問題の非負の爆発解について考える．

$$(1)\qquad \begin{cases} u_t = \Delta\phi(u) + f(u), & x \in \mathbf{R}^N,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

ただし, $\phi, f \in C^1([0,\infty)) \cap C^\infty((0,\infty))$, $\phi(\xi) > 0, \phi'(\xi) > 0, \phi''(\xi) \geq 0, f(\xi) > 0$ for $\xi > 0, \phi(0) = 0$ とし, さらに, f について

$$\int_1^\infty \frac{d\xi}{f(\xi)} < \infty$$

を仮定する．これは (1) の解が有限時間で爆発するための必要条件である．また, $u_0 \in BC(\mathbf{R}^N)$ は非負のものを考える．典型的な例として

$$(PM)\quad \phi(\xi) = \xi^m,\ f(\xi) = \xi^p \qquad (m \geq 1, p > 1)$$

が挙げられる．初期値問題 (1) は時間局所的な一意解を持ち, さらに初期値を適当に選べば解は有限時間で爆発する．即ち, (1) の有界な解が存在するような最大時間を $t_b(u_0)$ とすると, $t_b(u_0) < \infty$ かつ $\lim_{t\uparrow t_b(u_0)} ||u(\cdot,t)||_\infty = \infty$ が成り立つ．このとき, u は時刻 $t_b(u_0)$ で爆発すると言い, $t_b(u_0)$ を u の爆発時刻と呼ぶ.

本講演では, **最小時間で爆発する解**について論じたい．このような解を説明するために, $M = \|u_0\|_\infty$ とおいて次の常微分方程式を考える:

$$(2)\qquad v' = f(v) \quad (t > 0), \quad v(0) = M.$$

(2) の解 $v_M(t)$ は時刻 $T_M := t_b(M) = \int_M^\infty d\xi/f(\xi)$ で爆発する．比較定理によって全ての (1) の解 u に対して $u(x,t) \leq v_M(t)$ となり, 従って常に $t_b(u_0) \geq T_M$ である．そこで, $t_b(u_0) = T_M$ が成り立つとき, (1) の解 u は最小時間で爆発すると定義し, その爆発時刻を**最小爆発時刻**と呼ぶことにする.

定理 1. u を最小爆発時刻を持つ (1) の解とする．このとき, 次が成り立つ:
(i)$\|u(\cdot,t)\|_\infty = \lim_{R\to\infty} \sup_{|x|\geq R} u(x,t) = v_M(t) \quad$ in $t \in [0, T_M)$.
(ii)u は無限遠のある方向に爆発する．即ち, 次のような点列 $\{(x_n,t_n)\} \subset \mathbf{R}^N \times (0,T_M)$ と方向 $\psi \in S^{N-1}$ が存在する:

$$|x_n| \to \infty, \frac{x_n}{|x_n|} \to \psi, t_n \uparrow T_M \text{ and } u(x_n,t_n) \to \infty \text{ as } n \to \infty.$$

Giga-Umeda [3] は $\phi(\xi) = \xi, f(\xi) = \xi^p$ の場合に定数でない初期値が無限遠で最大値をとれば, 解は最小爆発時刻を持ち, 無限遠でのみ爆発することを証明した. Seki [5] はこの結果を $(PM), p > m$ の場合へ拡張した．定理 1 (ii) に現れる $\psi \in S^{N-1}$ を u の**爆発方向**と呼ぶ．Giga-Umeda [4] は $\phi(\xi) \equiv \xi$ の場合に (1) の解が最小時間で爆発するための初期値に対する十分条件を与え, 解の爆発方向を特徴付けた．我々の目的は一般の ϕ に対して (1) の解が最小時間で爆発するための初期値に対する必要十分条件を求め, またその解の爆発方向を特徴付けることである．そのために, 次のような u_0 の重み付き平均 A_ρ を導入する:

$$(3)\qquad A_\rho(x) = \int_{\mathbf{R}^N} u_0(x-y)\rho(y)dy, \quad \rho(y) = \Big(\int_{\mathrm{R}^N} e^{-|x|}dx\Big)^{-1} e^{-|y|}.$$

次の条件が爆発方向の判定に極めて有用である.

$(A)_\psi$ 次の条件を満たす点列 $\{x_n\} \subset \mathbf{R}^N$ が存在する:

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty, \ \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{|x_n|} = \psi \ \text{ and } \lim_{n\to\infty} A_\rho(x_n) = M.$$

定理 2. ある $\psi \in S^{N-1}$ に対して, 初期値 u_0 は条件 $(A)_\psi$ を満たすとする. このとき, (1) の解 u は最小時間で爆発し, ψ は u の爆発方向となる. さらに,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|x-x_n|<R} |u(x,t) - v_M(t)| = 0 \quad \text{for each } R > 0 \tag{4}$$

が成り立つ. この収束は t について $(0, T_M)$ で広義一様である.

定理 2 の証明には比較定理の証明に現れる初期値による解の評価と解の同程度連続性 (DiBenedetto [1]) を用いる.

さらに f が ϕ に比べて速く増大するという次の条件を仮定すれば, 爆発方向を初期値のプロファイルを使って完全に特徴付けることができる.

(B) 次の条件を満たす C^2 級関数 $\Psi(\eta)$, 定数 $c > 0, \ \eta_1 > 0$ が存在する:

$$\Psi(\eta), \Psi'(\eta), \Psi''(\eta) \geq 0 \quad \text{for } \eta > \eta_1;$$

$$\int_{\eta_1+1}^{\infty} \frac{d\eta}{\Psi(\eta)} < \infty;$$

$$\{f(\phi^{-1}(\eta))\}'\Psi(\eta) - f(\phi^{-1}(\eta))\Psi'(\eta) \geq c\Psi(\eta)\Psi'(\eta) \quad \text{for } \eta > \eta_1.$$

この条件は (PM) の場合については $p > m$ という条件に対応する. Friedman-McLeod [2] に端を発する, 一点爆発を示す論法を応用することにより, 次の定理が得られる.

定理 3. 条件 (B) を仮定し, u を最小時間で爆発する (1) の解とする. このとき,

(i)$u_0 \not\equiv M$ ならば u は無限遠でのみ爆発する.

(ii)$\psi \in S^{N-1}$ が u の爆発方向であることと初期値 u_0 が条件 $(A)_\psi$ を満たすことは同値である.

以上の結果を用いて, 最小時間で爆発するための初期値 u_0 の必要十分条件が得られる.

定理 4. 条件 (B) と $u_0 \not\equiv 0$ を仮定する. このとき, (1) の解 u が最小時間で爆発するための必要十分条件は初期値 u_0 が $\sup_{x\in\mathbf{R}^N} A_\rho(x) = \|u_0\|_\infty$ を満たすことである.

注意. 方程式を (PM) に制限すると, $p > m$ のとき, 最小時間で爆発する解 u は最小爆発時刻において完全爆発することが証明できる. すなわち, u はこの時刻を越えて延長されることはない. これを示すには定理 2 (4) と Suzuki [7] の結果を組み合わせればよい.

References

[1] E. DiBenedetto, *Continuity of weak solutions to a general porous medium equation*, Indiana Univ. Math. J. **32**(1983), 83-118.

[2] A. Friedman and B. McLeod, *Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations*, Indiana Univ. Math. J. **34**(1985), 425-447.

[3] Y. Giga and N. Umeda, *On blow-up at space infinity for semilinear heat equations*, J. Math. Anal. Appl. **316**(2006), 538-555.

[4] Y. Giga and N. Umeda, *Blow-up directions at space infinity for solutions of semilinear heat equations*, Bol. Soc. Paran. Mat. **23**(2005), 9-28.

[5] Y. Seki, *Asymptotic behaivior of solutions to the quasilinear parabolic equations =Blow-up at space infinity and nonblow-up=*, Master's thesis, Chuo University(2006).

[6] Y. Seki, R. Suzuki and N. Umeda, *Blow-up directions for quasilinear parabolic equations*, preprint.

[7] R. Suzuki, *Complete blow-up for degenerate quasilinear parabolic equations,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **130**(2000), 877-908.

E-mail address: seki@ms.u-tokyo.ac.jp