

## 半線形熱方程式の空間無限遠での爆発とそのプロフィール

下條 昌彦 (東大・数理)

本講演では、半線形熱方程式に対する初期値問題

$$(1) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

を考え、解が無限遠で爆発するという現象を論じる。ここで空間次元  $N$  は任意であり、非線形項  $f$  には次の増大度の条件を仮定する。

$$(2) \quad \left(\frac{f}{\log f}\right)' > 0, \quad \left(\frac{f}{\log f}\right)'' > 0 \quad (\sigma \gg 1), \quad \int_1^\infty \frac{\log f(\sigma)}{f(\sigma)} d\sigma < \infty.$$

例えば、次の増大度をもつ関数はこの条件を満たしている。

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u(\log(1+u))^b} = \infty \quad (b > 2).$$

まず、初期値問題 (P) の解がある時刻  $T = T(u_0, v_0)$  で爆発するとは、

$$\limsup_{t \nearrow T} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \infty.$$

が成り立つことをいう。解が時刻  $T$  で爆発するとき、点  $a \in \mathbb{R}^N$  がその爆発点であるとは、適当な点列  $x_m \rightarrow a$  と  $t_m \nearrow T$  に対して  $|u(x_m, t_m)| \rightarrow \infty$  が成り立つことを意味する。我々は爆発点の全体を爆発集合と呼び、それを  $B(u_0)$  と記す。また、「無限遠でのみ爆発する」とは、解は爆発するが  $B(u_0) = \emptyset$  となることをいう。これは、任意の有界集合  $K$  に対して次が成り立つことを意味する。

$$\limsup_{t \rightarrow T(u_0)} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(K)} < \infty$$

このとき、極限  $u(x, T) := \lim_{t \rightarrow T} u(x, t)$  が存在して  $\mathbb{R}^N$  上の  $C^2$  級関数となる。これを爆発時刻における解のプロファイルと呼ぶ。

空間無限遠での爆発に関する先駆的な結果として、空間 1 次元単独方程式の場合に Lacey [3] は半直線上の初期境界値問題の解に対して無限遠のみで爆発する例を示した。また、Giga-Umeda [1] は高次元の単独方程式  $u_t = \Delta u + u^p$  の初期値問題を扱い、初期値  $u_0$  がある定数  $M > 0$  に対して  $0 \leq u_0 \leq M, u_0(x) \rightarrow M (|x| \rightarrow \infty)$  をみたすときに無限遠のみでの爆発が起こることを示した。また、下條は [1] の結果を改良し、より広いクラスの初期値に対して無限遠のみでの爆発が起こることを示した [4]。より詳しく述べれば次を示した。

(H1) ある定数  $M > 0$  に対して  $0 \leq u_0 \leq M, u_0 \not\equiv M$  .

(H2) ある点列  $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^N$  と  $R_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$  が存在して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_0 - M\|_{L^1(B_{R_n}(a_n))} = 0$$

ならば、以下が成立する。

- (i)  $T := T(u_0) = T(M)$
- (ii)  $B(u_0) = \emptyset$  (無限遠のみでの爆発)
- (iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} u(a_n, T) = \infty$  .

その後 Giga-Umeda [2] は, この結果をある  $p > 1$  に対して  $f(\sigma)/\sigma^p \rightarrow \infty$  ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) が成り立つ場合に拡張した. さらに, 発表者と東京大学の俣野博教授は, その結果が (2) の下でも成り立つことを証明した ([5] 参照).

一方, これまでのところ爆発時刻での解のプロファイルや, 爆発後の挙動に関しては何も言及されていなかった. そこで我々は解のプロファイルの空間遠方での増大度に, ある上限があることを証明した. また, 爆発後の "延長解" は  $\mathbb{R}^N$  のすべての点で値が発散することも示すことができたのでそれらの結果について紹介する ([5] 参照). 以下  $\varphi(s)$  は次の微分方程式の解とする:

$$\dot{\varphi} = -f(\varphi) \quad (s > 0), \quad \lim_{s \searrow 0} \varphi(s) = \infty.$$

たとえば,  $f(u) = u^p$  ( $p > 1$ ) ならば

$$\varphi(s) = (p-1)^{-1/(p-1)} s^{-\frac{1}{p-1}} \quad (0 < s < \infty)$$

であり,  $f(u) = e^{au}$  ( $a > 0$ ) ならば次の関数である.

$$\varphi(s) = -\frac{1}{a} \log(as) \quad (0 < s < 1/a).$$

**主定理** (General upper bound and Lower bound). (i) ある  $\gamma \in (0, 1)$  と  $L > 0$  があって  $f^\gamma$  が  $[L, \infty)$  上で凸とする. (H1) と  $T(u_0) = T(M)$  を満たす任意の  $u_0 \in C(\mathbb{R}^N)$  と  $\varepsilon > 0$  に対して, ある  $C > 0$  があって

$$u(x, T) \leq \varphi\left(C \exp\left(-\frac{|x|^2}{4(T(M) - \varepsilon)}\right)\right).$$

(ii) 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して (H1) と  $T(u_0) = T(M)$  を満たす初期値  $u_0 \in C(\mathbb{R}^N)$  があってある  $C > 0$  に対して

$$u(x, T) \geq \varphi\left(C \exp\left(-\frac{|x|^2}{4(T(M) + \varepsilon)}\right)\right).$$

(iii) ある程度, 緩やかな増大度の関数  $\rho(x)$  に対し, (H1) と  $T(u_0) = T(M)$  を満たす初期値  $u_0$  があって

$$\frac{u(x, T)}{\rho(x)} \rightarrow 1 \quad (|x| \rightarrow \infty).$$

証明には適当な優解と劣解を構成する. それらをうまく用いることにより, 我々の結果は統一的に得ることができる.

## REFERENCES

- [1] Y. Giga and N. Umeda, *On blow up at space infinity for semilinear heat equations*, To appear in J.Math.Anal.Appli
- [2] Y. Giga and N. Umeda, *Blow up directions at space infinity for solutions of semilinear heat equations*, Preprint
- [3] A. A. Lacey, *The form of blow-up for nonlinear parabolic equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **98** (1984), no. 1-2, 183-202.
- [4] M.Shimojō 半線形熱方程式の空間無限遠での解の爆発現象とその局所性, 東京大学数理科学研究科修士論文 (2004)
- [5] H.Matano, M.Shimojō, *The global profile of blow-up at space infinity in semilinear heat equations*, Preprint