ON THE NAVIER-STOKES FLOWS WITH A NONTRIVIAL FLUX CONDITION IN AN APERTURE DOMAIN

久保 隆徹 (早稲田大学理工学術院)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ を 境界 $\partial\Omega$ が滑らかな aperture domain とする．すなわち、ある正定数 R に対して $\Omega \setminus B_R = (H_+ \cup H_-) \setminus B_R$ なる領域とする．ここで，$B_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R\}$, $H_\pm = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \pm x_n > 1\}$ とおいた．この領域 Ω において，次の nonstationary Navier-Stokes 方程式を考える：

$$\text{(NS)} \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla \pi = 0, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = a. \end{cases}$$

さらに，次の nontrivial-flux 条件を課す：$\phi(u) = \displaystyle\int_M N \cdot u d\sigma = \alpha(t)$.

主結果を述べる前に， aperture domain において知られている事実を述べておく．

Farwig-Sohr [1] により Helmhortz 分解：$L^p(\Omega)^n = J^p(\Omega) \oplus G^p(\Omega)$ が成立することが示されている．ここで，$J^p(\Omega)$, $G^p(\Omega)$ は次のように表される：

$$J^p(\Omega) = \overline{\{u \in C_0^\infty(\Omega)^n \mid \nabla \cdot u = 0 \quad \text{in } \Omega\}}, \qquad G^p(\Omega) = \{\nabla \pi \in L^p(\Omega)^n \mid \pi \in L^p_{loc}(\overline{\Omega})\}$$

また，$J^p(\Omega)$ は flux 条件 $\phi(u)$ を用いて次のように特徴付けることが出来る：

$$J^p(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \nabla \cdot u = 0, \ \nu \cdot u|_{\partial\Omega} = 0, \ \phi(u) = 0\}$$

ここで，ν は $\partial\Omega$ の単位外法線である．$1 < p < \frac{n}{n-1}$ のときは，自動的に $\phi(u) = 0$ を満たし，それ以外の時には $\phi(u) = 0$ を課さなければ (NS) の解の一意性が導くことが出来ないことが知られている．

次に Stokes 作用素について考える．ソレノイダル部分への連続射影作用素を $P : L^p(\Omega)^n \to J^p(\Omega)$ とおく．このとき，Stokes 作用素 A を $Au = -P\Delta u$ $(u \in D(A))$ で定義する．ここで，定義域 $D(A)$ を

$$D(A) = W^{2,p}(\Omega)^n \cap W_0^{1,p}(\Omega)^n \cap J^p(\Omega)$$

とする．Farwig-Sohr [1] により $-A$ は $J^p(\Omega)$ 上解析的半群 $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ を生成することが示されている．この Stokes 半群に対して次の L^p-L^q 評価が成立することを前回の若手発展方程式セミナーで報告した．

補題 1 ($L^p - L^q$ 評価)**.** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ を aperture domain とする．
(1) $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $(p, q) \neq (1, 1), (\infty, \infty)$ とする．このとき，次の評価が成立する．

$$\|T(t)f\|_{L^q(\Omega)} \leq C_{p,q} t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall\, t > 0, \ \forall\, f \in J^p(\Omega).$$

(2) $1 \leq p \leq q < \infty$ $(q \neq 1)$ とする．このとき，次の評価が成立する．

$$\|\nabla T(t)f\|_{L^q(\Omega)} \leq C_{p,q} t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) - \frac{1}{2}} \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall\, t > 0, \ \forall\, f \in J^p(\Omega).$$

前回は，さらにこの Stokes 半群に対する $L^p - L^q$ 評価を用いて，Flux 条件 $\alpha(t) \equiv 0$ の条件下での小さい初期値に対する時間大域解の存在とその時間無限大における漸近挙動についての結果を紹介した．

今回は，Flux 条件 $\alpha(t) \not\equiv 0$ の場合において示すことが出来た結果を紹介する．結果を紹介する前に特殊な関数を紹介しよう．Galdi [2] (Vol.I VI) により，次の関係を満たすような $\chi(x) \in$

$C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{2,q}(\Omega)$ $(n/(n-1) < q < \infty)$ を作ることが出来る：

$$(1) \qquad \phi(\chi) = 1, \quad \nabla \cdot \chi = 0, \quad \chi|_{\partial\Omega} = 0.$$

この特殊な関数を用いて，non-trivial な Flux 条件を満たす (NS) の解 u を $u = v + \alpha(t)\chi(x)$ とおくことにより，0-Flux 条件の時の問題に帰着させることが出来る．実際，v は次の方程式を満たすことが分かる：

$$\text{(v-NS)} \begin{cases} \partial_t v - \Delta v + v \cdot \nabla v + \nabla \pi = I(\alpha, \chi) + L(v), \quad \nabla \cdot v = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty) \\ v|_{\partial\Omega} = 0, \qquad v|_{t=0} = a(x) - \alpha(0)\chi(x), \qquad \phi(v) = 0. \end{cases}$$

ここで，

$$I(\alpha, \chi) = -\alpha_t \chi + \alpha \delta \chi - \alpha^2 \chi \cdot \nabla \chi, \qquad L(v) = \alpha v \cdot \nabla \chi - \alpha \chi \cdot \nabla v$$

とおいた．この v に対して，加藤の方法 [3]（または，縮小写像の原理）を適用するために，(v-NS) にソレノイダル部分への連続射影作用素 P を作用させた次の方程式を考える．

(P-v-NS)

$$\partial_t v + Av = -P(v \cdot \nabla v) + PL(v) + PI(\alpha, \chi), \;\; v(0) = a(x) - \alpha(0)\chi(x).$$

これを次の積分方程式になおす:

$$\begin{aligned} v(t) = T(t)v(0) - \int_0^t T(t-s)P(u \cdot \nabla u)(s)ds \\ + \int_0^t T(t-s)PL(v)(s)ds + \int_0^t T(t-s)PI(\alpha, \chi)(s)ds. \end{aligned}$$

これに対して、菱田の方法 [4] と同様にして，Stokes 半群の L^p-L^q 評価を適用すれば次を得る．

主定理 2. $n \geq 3$ とする．$\theta_0 < 1 - n/2q$, $\theta_\infty > 1/2$ に対して，Flux $\phi(u) = \alpha(t)$ は次を満たす減少関数とする：

$$|\alpha(t)| \leq Ct^{-\theta_0}, \qquad |\partial_t \alpha(t)| \leq Ct^{-\theta_\infty}$$

とする．このとき，次を満たすような正定数 $\delta = \delta(\Omega, n)$ が存在する：$a - \alpha(0)\chi \in J^n(\Omega)$ に対して，$\|a - \alpha(0)\chi\|_{L^n} \leq \delta$ であれば，Flux $\phi(t) = \alpha(t)$ をもつ (NS) は時間大域解をもち，$t \to \infty$ のとき，

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^r(\Omega)} &= o(t^{-\frac{1}{2}+\frac{n}{2r}}) && \text{for } n \leq r \leq \infty, \\ \|\nabla u(t)\|_{L^r(\Omega)} &= o(t^{-1+\frac{n}{2r}}) && \text{for } n \leq r < \infty. \end{aligned}$$

参考文献

[1] R. Farwig and H. Sohr: Helmholtz decomposition and Stokes resolvent system for apeture domains in L^q-space, Analysis 16, 1-26(1996)

[2] Giovanni P. Galdi: An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations, Vol.I: Linearized Steady Problems, Vol. II: Nonlinear Steady Problems, Springer, New York, 1994.

[3] T. Kato: Strong L^p-Solutions of the Navier-Stokes Equation in $\mathbb{R}^n$, with Applications to weak solutions. Math. Z. 187,471-480 (1984)

[4] T. Hishida: The nonstationary Stokes and Navier-Stokes flows through an aperture. Elliptic and parabolic problems (Rolduc/Gaeta, 2001), 126-134, World Sci. Math. Ann. 285, 265-288

E-mail address: kubo@waseda.jp