振り子の方程式の線形化問題に対するすべての固有値・固有関数について

若狭　徹 (早稲田大学大学院理工学研究科)
四ツ谷　晶二 (龍谷大学理工学部)

1. Introduction

次の 1 次元非線形境界値問題

$$(1)\qquad \begin{cases} \varepsilon^2 u''(x) + f(u(x)) = 0 & \text{in } (0,1), \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

及び (1) の非自明解 $u = u(x)$ に対する線形化固有値問題

$$(2)\qquad \begin{cases} \varepsilon^2 \varphi''(x) + f'(u(x))\varphi(x) + \mu\varphi(x) = 0 & \text{in } (0,1), \\ \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0. \end{cases}$$

について考える．ここで $\varepsilon > 0$, $f \in C^1(\mathbf{R})$ である．

問題 (1) はある反応拡散方程式の定常問題として与えられ, また (2) は定常解 $u(x)$ の安定性を決定する．文献 [1] や [3] によれば "time-map" と呼ばれる関数を解析することにより, (1) の解構造やその不安定指数が決定される．また $\varepsilon > 0$ が十分小さい場合は応用上重要であり, このとき $u(x)$ のグラフは layer や spike と呼ばれる特徴的なパターンを持つことが知られている．この場合の (2) の固有関数のグラフの形状について関心がある．

本講演では, "representation equation" と呼ばれる方程式を導き, これを解くことにより (2) の厳密解が求まることを示す．特にこれの方法を

$$f(u) = \sin u \quad (\text{振り子の方程式})$$

の場合に応用し, (1) の任意の非自明解 $u(x)$ に対する線形化問題 (2) の全ての固有値及び固有関数が, ある楕円積分を含む超越方程式により完全に決定されることを明らかにする．

2. Main Results

以下 $f(u) = \sin u$ とし, $-\pi \le u(x) \le \pi$ を仮定する．このとき (1) の全ての非自明解は $(\varepsilon_n(k), \pm u_n(x;k))$ の形により与えられる．ただし $n \in \mathbf{N}, k \in [0,1)$,

$$\varepsilon_n(k) := \frac{1}{2nK(k)}, \quad u_n(x;k) := 2\sin^{-1}\Big[k \cdot \mathrm{sn}\big(K(k)(1+2nx), k\big)\Big]$$

($K(k)$, $\mathrm{sn}(x,k)$ は第 1 種完全楕円積分及び Jacobi の楕円関数) である．特に $u_1(x;k)$ は x について単調減少な関数である．

このとき (2) に対する representation equation は

$$(3)\qquad 2(\cos u - 1 + 2k^2)\Phi_{uu} - \sin u \Phi_u + (\cos u + \mu)\Phi = 0, \quad u \in (-2\sin^{-1} k, 2\sin^{-1} k)$$

により与えられる．以下準備として (3) の解析を行う．簡単な計算により $(\mu, \Phi) = (k^2 - 1, \cos u/2)$, $(k^2, \sin u/2)$ は (3) を満たすことがわかる．次に $k^2 - 1 < \mu < 0$ 又は $k^2 < \mu$ と

し, Φ_{cos} 及び Φ_{sin} を次により定義する:

$$\Phi_{cos}(u,\mu;k) := \sqrt{h(u,\mu;k)} \cdot \cos\left(\int_0^u \frac{\sqrt{2\rho(\mu,k)}}{\sqrt{\cos s - 1 + 2k^2} \cdot h(s,\mu;k)} ds\right),$$

$$\Phi_{sin}(u,\mu;k) := \sqrt{h(u,\mu,k)} \cdot \sin\left(\int_0^u \frac{\sqrt{2\rho(\mu,k)}}{\sqrt{\cos s - 1 + 2k^2} \cdot h(s,\mu;k)} ds\right),$$

ただし

$$h(u,\mu;k) := \begin{cases} \cos u - 1 + 2k^2 - 2\mu, & k^2 - 1 < \mu < 0, \\ 1 - 2k^2 - \cos u + 2\mu, & \mu > k^2, \end{cases}$$

$$\rho(\mu,k) := \mu(\mu - k^2)(\mu - k^2 + 1)$$

である．これらは (3) の線形独立な解を与える ([2] の解法による)．またこれらの $u = \pm\sin^{-1} k$ における境界値は

$$A(\mu,k) := \sqrt{\frac{\mu(\mu - k^2 + 1)}{\mu - k^2}} \Pi\left(\frac{k^2}{\mu - k^2}, k\right), \quad k \in [0,1), \quad k^2 - 1 < \mu < 0,\ k^2 < \mu,$$

($\Pi(\nu,k)$ はパラメータ ν, 母数 k の第 3 種完全楕円積分) を用いて表すことができる．このとき次の事実を証明することができる．

命題 1. $0 < A_0 < \pi/2$ 又は $\pi/2 < A_0$ とする．μ に関する超越方程式 $A(\mu,k) = A_0$ は任意の $k \in [0,1)$ に対して一意の解 $\mu(k,A_0)$ を持ち，さらに $\lim_{k\to 1-0} \mu(k,A_0) = 0$ $(0 < A_0 < \pi/2)$, 1 $(\pi/2 < A_0)$ が成り立つ．

以下 $\mu_j^n(k)$ 及び $\varphi_j^n(x;k)$ $(n \in \mathbf{N},\ j \in \mathbf{N} \cup \{0\})$ は $(\varepsilon_n, u_n(x;k))$ に対する線形化問題 (2) の $(j+1)$-番目の固有値及び固有関数を表すものとする．以上の準備の下で次の定理が成り立つ．

定理 1. 線形化問題 (2) について次が成り立つ:

(i) $\mu_0^n(k) = k^2 - 1, \quad \varphi_0(x;k) = \cos\dfrac{u_n(x;k)}{2}.$

(ii) $\mu_n^n(k) = k^2, \quad \varphi_n^n(x;k) = \dfrac{1}{k}\sin\dfrac{u_n(x;k)}{2}.$

定理 2. $j \neq 0,\ n$ とする．このとき $\mu_j^n(k) = \mu(k, j\pi/2n)$ であり，対応する固有関数は次で与えられる:

$$\varphi_j^n(x;k) = \sqrt{h(u_n(x;k), \mu_j^n(k);k)} \cos\left(\int_0^x \frac{2\sqrt{\rho(\mu_j^n(k))}}{h(u_n(y;k), \mu_j^n(k);k)} dy\right).$$

References

[1] N. Chafee and E.F. Infante, Applicable Anal., **4** (1974/75), 17-37.
[2] J. Kovacic, J. Symbolic. Comput., **2** (1986), 3-43.
[3] P. Brunovský and B. Fiedler, J. Differential Equations, **81** (1989), 106-135.
[4] S. Kosugi, Y. Morita and S. Yotsutani, Comm. Pure Appl. Anal., **3** (2005), 665-682.
[5] T. Wakasa, to appear in Funkcialaj Ekvacioj, **49** (2006), 321-336.