リーマンゼータ関数，ベルヌーイ多項式とソボレフ不等式の最良定数

亀高 惟倫，山岸 弘幸 (阪大基礎工 D3)，渡辺 宏太郎 (防衛大)，
永井 敦 (日大生産工)，武村 一雄 (東京工科大)

リーマンゼータ関数 $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ $(\mathrm{Re}\, z > 1)$ の偶数における値 $\zeta(2M)$ $(M = 1, 2, 3, \cdots)$ の変分学的な意味付けを行った．

定理
$$H_M = \left\{ u(x) \,\middle|\, u^{(M)}(x) \in L^2(0,1), \right.$$
$$\left. u^{(i)}(1) - u^{(i)}(0) = 0 \quad (0 \le i \le M-1), \quad \int_0^1 u(x)dx = 0 \right\}$$

に属する任意の関数 $u(x)$ に対し，$u(x)$ によらない正定数 C があって，ソボレフ不等式

$$\left(\sup_{0 \le y \le 1} |\, u(y) \,| \right)^2 \le C \int_0^1 \left|\, u^{(M)}(x) \,\right|^2 dx$$

が成り立つ．C のうち最良のものは

$$C_M = \frac{2\,\zeta(2M)}{(2\pi)^{2M}} = \frac{B_M}{(2M)!}$$

である．ここで B_M はベルヌーイ数である．
上の不等式で C を C_M でおきかえるとき，$0 \le y \le 1$ なる任意の y と，任意の複素数 c に対し，$u(x) = c\, b_{2M}(\,|x-y|\,)$ に対して等号が成り立つ．$b_i(x)$ は i 次ベルヌーイ多項式である．

ベルヌーイ多項式 $b_i(x)$ $(i = 0, 1, 2, \cdots)$ は

$$\begin{cases} b_0(x) = 1 \\ b_i'(x) = b_{i-1}(x), \quad \displaystyle\int_0^1 b_i(x)\, dx = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

によって定められる．

$$b_0(x) = 1, \quad b_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad b_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}, \quad \cdots$$

である．

可解条件 $\int_0^1 f(y)\,dy\ =\ 0$ をみたす区間 $0<x<1$ 上の任意の有界連続関数 $f(x)$ に対して，境界値問題

BVP

$$\begin{cases} (-1)^M u^{(2M)}\ =\ f(x) & (0<x<1) \\ u^{(i)}(1)-u^{(i)}(0)\ =\ 0 & (0\le i\le 2M-1) \\ \displaystyle\int_0^1 u(x)dx\ =\ 0 & \end{cases}$$

は唯一つの解をもち，解 $u(x)$ はグリーン関数 $G(x,y)$ によって

$$u(x)\ =\ \int_0^1 G(x,y)\,f(y)\,dy \qquad (0<x<1)$$

と表示される．

$$G(x,y)\ =\ (-1)^{M-1}\,b_{2M}(|x-y|)\ =\ 2\sum_{n=1}^{\infty}(2\pi n)^{-2M}\cos(\,2\pi n(x-y)\,)$$

$$(0<x,y<1)$$

である．とくに

$$G(y,y)\ =\ (-1)^{M-1}\,b_{2M}(0)\ =\ 2\sum_{n=1}^{\infty}(2\pi n)^{-2M}\ =\ \frac{2}{(2\pi)^{2M}}\,\zeta(2M)$$

である．

関数空間 H_M に対して

$$(u,v)_M\ =\ \int_0^1 u^{(M)}(x)\,\overline{v}^{(M)}(x)\,dx$$

は内積となり，H_M はこの内積によりヒルベルト空間となる．$G(x,y)$ はヒルベルト空間 H_M と内積 $(\cdot,\cdot)_M$ に関し，再生核である．すなわち，任意の $u(x)\in H_M$ に対して

$$\int_0^1 u^{(M)}(x)\,\partial_x^M G(x,y)\,dx\ =\ u(y) \qquad (0<y<1)$$

が成り立つ．

References

[1] Y. Kametaka, K. Watanabe, A. Nagai and S. Pyatkov *The best constant of Sobolev inequality in an n dimensional Euclidean space* , Scientiae Mathematicae Japonicae Online, **e-2004** (2004) pp. 295-303

[2] K. Watanabe, T. Yamada and W. Takahashi, *Reproducing Kernels of* $H^m(a,b)$ $(m=1,2,3)$ *and Least Constants in Sobolev's Inequalities*, Applicable Analysis **82** (2003) pp. 809–820.

[3] Y. Kametaka, K. Takemura, Y. Suzuki and A. Nagai, *Positivity and hierarchical structure of Green's functions of 2-point boundary value problems for bending of a beam* , Japan J. Ind. Appl. Math. **18** (2001) pp. 543-566

〒 560-8531 大阪府豊中市待兼山町 1-3 阪大基礎工数理教室
E-mail address: yamagisi@sigmath.es.osaka-u.ac.jp