楕円–放物型変分不等式に対する最適制御問題について

山崎 教昭 (室蘭工業大学 工学部)

§1 Introduction

本研究は，K.-H. Hoffmann 氏（Technische Universität München）と久保雅弘 氏（名古屋工業大学 工学部）との共同研究である。

時間依存制約をもつ楕円–放物型変分問題を考察する：

Problem (P;f) Find a function $u : [0,T] \to H^1(\Omega)$ satisfying the following:

(a) $u \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$ and $b(u) \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$.

(b) $u \in K(t)$ for a.e. $t \in (0,T)$.

(c) For a.e. $t \in (0,T)$, the following inequality holds:

$$(b(u)_t, u-v) + \int_\Omega a(x,b(u),\nabla u)\cdot\nabla(u-v)dx \le (f(t),u-v) \tag{1}$$

for all $v \in K(t)$.

(d) $b(u(0)) = b_0$ in $L^2(\Omega)$.

ここで, T は正定数であり，Ω は $\mathbb{R}^N$ $(N \ge 1)$ の有界部分領域である．$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は与えられた非減少関数である．$a(x,s,p)$ は quasi–linear elliptic vector field であり，特に

$$a(x,s,p) = \partial_p A(x,s,p)$$

となる potential function $A : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ が存在するとする．$(\cdot,\cdot)$ は $L^2(\Omega)$-内積である．時間依存制約 $K(t)$ は $H^1(\Omega)$ の凸部分集合であり，$f(t,x)$ は $(0,T)\times\Omega$ 上の与えられた関数とする．また，b_0 は与えられた初期値である．

変分不等式 (1) は， 領域 $\{b'(u) = 0\}$ において楕円型であり，領域 $\{b'(u) > 0\}$ において放物型である．従って，(1) は 楕円–放物型変分不等式と呼ばれ，ダムなど porous media 内の水の浸透を記述するモデルの弱形式としてあらわれる (cf [1]).

本講演では，時間依存制約をもつ楕円–放物型変分問題 (P;f) の最適制御問題を考察する．つまり，次の問題を考える：

Problem (OP;f): Find the optimal control $f^* \in F$ such that

$$J(f^*) = \inf_{f \in F} J(f).$$

ここで，$J(f)$ は

$$J(f) := \frac{1}{2}\int_0^T |b(u)-b_d|^2_{L^2(\Omega)}dt + \frac{1}{2}\int_0^T |f|^2_{H^1(\Omega)}dt + \frac{1}{2}\int_0^T |f_t|^2_{L^2(\Omega)}dt$$

と定義されたコスト関数である．f は制御コントロール，$b(u)$ は状態問題 (P;f) の解であり，b_d は $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ の与えられた目標である．また，F は

$$F := \{f \in L^2(0,T;H^1(\Omega)); f_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))\}$$

と定義されたコントロール空間である．

§2 主定理

次を仮定する：

(A1) $a(x,s,p) = \partial_p A(x,s,p)$ for some potential function $A(x,s,p)$. There exist constants $\mu > 0$, $C_1 = C_1(a) > 0$ and $C_2 = C_2(a) > 0$ such that

$$[a(x,s,p) - a(x,s,\hat{p})] \cdot (p - \hat{p}) \geq \mu |p - \hat{p}|^2,$$
$$|a(x,s,p)|^2 + |A(x,s,p)| + |\partial_s A(x,s,p)|^2 \leq C_1(1 + |s|^2 + |p|^2),$$
$$|a(x,s,p) - a(x,\hat{s},p)| \leq C_2(1 + |p|)|s - \hat{s}|$$

for all $x \in \Omega,\ s,\ \hat{s} \in \mathbb{R},\ p,\ \hat{p} \in \mathbb{R}^N$. Moreover, $a(\cdot,\cdot,\cdot)$ and $A(\cdot,\cdot,\cdot)$ satisfy the Caratheodory condition.

(A2) $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is bounded, nondecreasing and Lipschitz continuous.

(A3) $K(t)$ is a non-empty, closed and convex set in $H^1(\Omega)$ for all $t \in [0,T]$.

(A4) For any $z, \overline{z} \in K(t)$ and $w, \overline{w} \in H^1(\Omega)$ with $w \leq z,\ \overline{z} \leq \overline{w}$, we have

$$w \vee \overline{z},\ z \wedge \overline{w} \in K(t),$$

where $u \vee v := \max\{u,v\},\ u \wedge v := \min\{u,v\}$.

(A5) There is a function $\alpha \in W^{1,2}(0,T)$ satisfying the following property $(\star)$:

$(\star)$: For any $0 \leq s < t \leq T$, $w \in H^1(\Omega)$ with $|w(x)| \leq |b|_\infty$ a.e. in Ω and $z \in K(s)$ there exists $\tilde{z} \in K(t)$ such that

$$|\tilde{z} - z|_{L^2(\Omega)} \leq |\alpha(t) - \alpha(s)|(1 + |z|_{H^1(\Omega)})$$

and

$$\int_\Omega A(x,w(x),\nabla\tilde{z}(x))dx - \int_\Omega A(x,w(x),\nabla z(x))dx$$
$$\leq |\alpha(t) - \alpha(s)|(1 + |z|^2_{H^1(\Omega)} + |w|_{H^1(\Omega)}|z|_{H^1(\Omega)}).$$

(A6) There is a constant $C_3 = C_3(K) > 0$ such that

$$|z|_{H^1(\Omega)} \leq C_3(1 + |\nabla z|_{L^2(\Omega)}) \qquad \text{for all } z \in K(t) \text{ and } t \in [0,T].$$

(A7) If $z,\ \overline{z} \in K(t)$ and $\nabla[z - \overline{z}]^+ \equiv 0$, then $z \leq \overline{z}$.

このとき，次の定理を得た。

主定理 (Existence of optimal control)
Assume (A1)–(A7) *are satisfied, and let* $b_0 = b(u_0)$ *for some* $u_0 \in K(0)$. *Let* b_d *be an element in* $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. *Then, there exists at least one optimal control* $f^* \in F$ *such that*

$$J(f^*) = \inf_{f \in F} J(f).$$

References

[1] H. W. Alt and S. Luckhaus, Quasilinear elliptic-parabolic differential equations, *Math. Z.,* **183**, 311–341 (1983).

[2] N. Kenmochi and I. Pawlow, Parabolic-elliptic free boundary problems with time-dependent obstacles, *Japan J. Appl. Math.,* **5**, 87–121 (1988).

[3] K.-H. Hoffmann, M. Kubo and N. Yamazaki, Optimal control problems for elliptic-parabolic variational inequalities with time-dependent constraints, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **27**(2006), 329–356.

〒 050-8585　北海道室蘭市水元町 27-1　室蘭工業大学 共通講座
E-mail address: noriaki@mmm.muroran-it.ac.jp