FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF A TYPE SIMILAR TO $f'(x) = 2f(2x+1) - 2f(2x-1)$ AND IT'S APPLICATION TO POISSON'S EQUATION

米田 剛
東京大学数理科学研究科

[1, 2] は $f'(x) = F(f(2x))$, $x \in \mathbb{R}$ （F は或る条件を満たす）における大域解の存在を考えたり

$$f'(x) = af(\lambda x) + bf(x) \quad a,\ b \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0, \quad x \in [0, \infty) \tag{0.1}$$

の形の方程式の解をディリクレ級数で構成した。(a, b, λ は或る条件を満たす。) (0.1) に関しては物理的要請から出てきた方程式であり、電車のパンタグラフと架線が織り成す振動から考え出された方程式である（[6, 7] 参照)。[4, 5] はその (0.1) に於ける漸近解について研究している。その後 [8, 9, 10] では上述で紹介した参考文献の解析方法とは全く違った方法で、$f'(x) = 4f(2x)$ 及び $f'(x) = \lambda^2 f(\lambda x)$, $\lambda > 1$ の方程式の解の一つを構成をした。この構成方法を使うと数値計算が容易である。そのグラフを下に示そう。

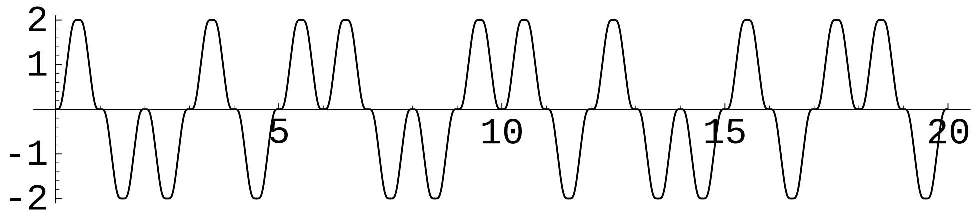


Figure 1. $f'(x) = 4f(2x)$

[10] で使われている方法論を使うと、$\phi'(x) = 2\phi(2x+1) - 2\phi(2x-1)$ 及びそれを一般化した形の関数微分方程式についての解の存在や一意性が議論できる。この方程式の解に関しては幅広い応用を有し、遅れ型関数微分方程式（[11] 参照）や 1 次元ポアソン方程式に応用出来る。

主結果は次の通りである。

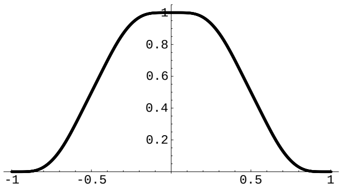
Theorem 0.1. 関数微分方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} f(x) = \lambda^{|\alpha|+d} \sum_j c_j f(\lambda x - b_j), \quad \lambda > 1,\ c_j \in \mathbb{R},\ b_j \in \mathbb{R}^d \tag{0.2}$$

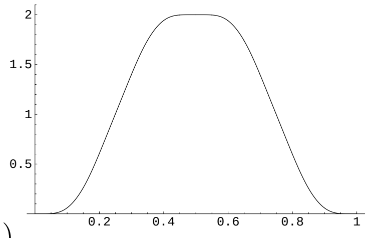
は $L^1(\mathbb{R})$ 上で解空間の次元が 1 になる。尚、$\{c_j\}_j$ と $\{b_j\}_j$ は或る条件を満たし、$\alpha_i \geq 1$, $i = 1, 2, \cdots, d$ において $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_d)$ は *multli-index* である。さらに解は $C^\infty(\mathbb{R})$ になり、パソコンによる数値計算も容易である。(数値計算の具体例は下を参照)

References

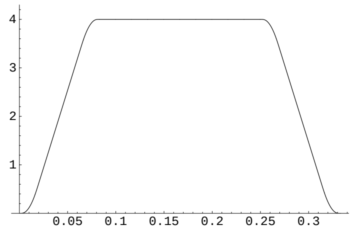
[1] P. O. Frederickson, *Global solutions to certain nonlinear functional differential equations*, J. Math. Anal. Appl. 33 (1971), 355–358.



$f'(x) = 2f(2x+1) - f(2x-1)$



$f'(x) = 4f(2x) - 4f(2x-1)$



$f'(x) = 16f(4x) - 16f(4x-1)$

[2] P. O. Frederickson, *Dirichlet series solutions for certain functional differential equations*, Japan-United States Seminar on Ordinary Differential and Functional Equations (Kyoto, 1971), 249–254. Lecture Notes in Math., Vol. 243, Springer, Berlin, 1971.

[3] Takasi Kusano, *Osillation of even order linear functional differential equations with deviating arguments of mixed type*, J. Math. Anal. Appl. 98 (1984), 341–347.

[4] T. Kato, *Asymptotic behavior of solutions of the functional differential equation* $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$, Delay and functional differential equations and their applications (Proc. Conf., Park City, Utah, 1972), Academic Press, New York, 1972, 197–217.

[5] T. Kato and J. B. McLeod, *The functional-differential equation* $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$, Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971), 891–937.

[6] L. Fox and D. F. Mayers, *On a functional-differential equation*, J. Inst. Maths Applics (1971) 8, 271–307.

[7] J. R. Ockendon and A. B. Tayler, *The dynamics of a current collection system for an electric locomotive*, Proc. Roy. Soc. Lond. A. 322, 447–468 (1971).

[8] T. Yoneda, *Spline functions and* n*-periodic points*, Transactions of the Japan Society for Industrial and Applied Mathematics, 15 (2005), 245–252.

[9] T. Yoneda, *On the functional-differential equation of advanced type* $f'(x) = af(2x)$ *with* $f(0) = 0$, J. Math. Anal. Appl., 317 (2006), 320–330.

[10] T. Yoneda, *On the functional-differential equation of advanced type* $f'(x) = af(\lambda x)$, $\lambda > 1$ *with* $f(0) = 0$, preprint.

[11] Yoshihiro Sawano and Tsuyoshi Yoneda, *Quarkonial decomposition suitable for integration*, to appear in Mathematische Nachrichten.