3 次方程式の解法の補足と不思議

立方根のセクションで話したように複素数の範囲では立方根は 3 つあります．従って, (7) の 3 次方程式

$$2x^3+6x^2-9=0$$

の解法については

$$A^3=B=2,\ \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad A=\sqrt[3]{2},\ \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

となったところで, 複素数の範囲で考えれば $t^3=1$ の解 $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ を使って

$$\begin{aligned}\left\{\sqrt[3]{2}\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)\right\}^3&=\left(\sqrt[3]{2}\right)^3\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)^3\\&=2\times 1\\&=2\end{aligned}$$

よって A の解, 2 と $\dfrac{1}{2}$ の 3 乗根は

$$A=\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{2}\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right),\ \frac{1}{\sqrt[3]{2}},\ \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)$$

の 6 つになります．ここで $X=A+\dfrac{1}{A}$ より

$$X=\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\ \sqrt[3]{2}\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right),\ \sqrt[3]{2}\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)$$

ここで二番目と三番目の虚数解は

$$-\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)i$$

となり互いに複素共役です．結局

$$x=-1+\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\ -1-\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)i$$

もう一つ別の 3 次方程式

$$x^3+3x^2-3x-1=0$$

について考えると

$$x+1=X$$

とおいて

$$\begin{aligned} x^3+3x^2-3x-1 &= \{(x+1)^3-3x-1\}-3x-1 \\ &= (x+1)^3-6x-2 \\ &= X^3-6X+4=0 \end{aligned}$$

となります.

$$X = A+\frac{2}{A}$$

とおいて

$$\begin{aligned} \left(A+\frac{2}{A}\right)^3-6\left(A+\frac{2}{A}\right)+4 &= A^3+6A+\frac{12}{A}+\frac{8}{A^3}-6A-\frac{12}{A}+4 \\ &= A^3+\frac{8}{A^3}+4=0 \end{aligned}$$

さらに

$$B = A^3$$

とおいて

$$B^2+4B+8=0 \quad \rightarrow \quad B=-2\pm 2i$$

また

$$\begin{aligned} (1\pm i)^3 &= 1\pm 3i+3i^2\pm i^3 \\ &= 1\pm 3i-3\mp i \\ &= -2\pm 2i \end{aligned}$$

だから

$$A = 1\pm i,\ (1\pm i)\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right),\ (1\pm i)\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

結局, 後の二つの解は

$$\frac{-1+\sqrt{3}\pm(1+\sqrt{3})i}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}\pm(1-\sqrt{3})i}{2}$$

となる. 最初の解も含めて A の解はすべて互いに複素共役な 3 組の虚数解で複素共役との積は以下のようにいずれも 2 となる.

$$\begin{aligned} (1+i)(1-i) &= 1-i^2 \\ &= 1-(-1)=2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-1+\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i}{2}\cdot\frac{-1+\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})i}{2} &= \frac{(-1+\sqrt{3})^2-(1+\sqrt{3})^2i^2}{4} \\ &= \frac{1-2\sqrt{3}+3-(1+2\sqrt{3}+3)(-1)}{4} \\ &= \frac{1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3}+3}{4}=2 \end{aligned}$$

$$\frac{-1-\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i}{2}\cdot\frac{-1-\sqrt{3}-(1-\sqrt{3})i}{2}=\frac{(-1-\sqrt{3})^2-(1-\sqrt{3})^2i^2}{4}$$
$$=\frac{1+2\sqrt{3}+3-(1-2\sqrt{3}+3)(-1)}{4}$$
$$=\frac{1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}+3}{4}=2$$

従って, A と $\dfrac{2}{A}$ は互いに共役な複素数となり (例えば $A=1+i$ なら $\dfrac{2}{A}=\dfrac{2}{1+i}=1-i$), $X=A+\dfrac{2}{A}$ は実数となる. 即ち

$$X=2,\ -1\pm\sqrt{3}$$

よって

$$x=1,\ -2\pm\sqrt{3}$$

このように一般の 3 次方程式

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \qquad (a\neq 0)$$

を解くとき, 途中に現れる 2 次方程式

$$aB^2-\frac{p^3}{27a^2}+qB=0$$

の解が実数のときは 3 次方程式の解は互いに共役な虚数解を含み, 2 次方程式の解が虚数のときは 3 次方程式の解は全て実数になります.