令和元年 6 月 22 日実施 第 338 回数検 2 級 2 次試験解答例

問題 1. (1) $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OA}} = \dfrac{345}{350} = \dfrac{69}{70}$.

(2) (1) より $\cos\theta = \dfrac{69}{70} = 0.98571\cdots$. 問題にある三角関数表より $\theta = 10^\circ$.

扇形 OAB の中心角は $2\theta = 20^\circ$ だから弧 AB$= 2\times 3.1416 \times 350 \times \dfrac{20}{360} = 122.17\cdots(\mathrm{m})$.

$\therefore 122.17\cdots \div 22 = 5.553\cdots$. よって約 5.6 秒.

問題 2. (1) 積が 3 の倍数でないのは出た目がすべて 3 の倍数でない, すなわち 3, 6 以外のときであり,

その確率は $\left(\dfrac{4}{6}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$ である.

(2) 積が 6 の倍数でない $\Leftrightarrow$ 積が 2 の倍数でない ($\Rightarrow$ 奇数である) かまたは 3 の倍数でない.

積が奇数であるのは出た目がすべて奇数, すなわち 1, 3, 5 のどれかのときであり, その確率は $\left(\dfrac{3}{6}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$.

積が 2 の倍数でも 3 の倍数でもないのは出た目がすべて 2 の倍数でも 3 の倍数でもない, すなわち 1, 5 のどちらかのときであり, その確率は $\left(\dfrac{2}{6}\right)^3 = \dfrac{1}{27}$. よって求める確率は $\dfrac{8}{27} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{27} = \dfrac{83}{216}$.

問題 3. (1) $(2^x+2^{-x})^3 = (2^x)^3 + 3\cdot(2^x)^2\cdot 2^{-x} + 3\cdot 2^x\cdot(2^{-x})^2 + (2^{-x})^3 = 8^x + 3(2^x+2^{-x}) + 8^{-x}$. $2^x + 2^{-x} = 3$ より

$3^3 = 8^x + 8^{-x} + 3\cdot 3$. $\therefore 8^x + 8^{-x} = 3^3 - 3\cdot 3 = 18$.

(2) $(2^x+2^{-x})^2 = (2^x)^2 + 2\cdot 2^x\cdot 2^{-x} + (2^{-x})^2 = 4^x + 4^{-x} + 2$ より $4^x + 4^{-x} = (2^x+2^{-x})^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7\cdots$①.

$(8^x+8^{-x})(4^x+4^{-x}) = (2^{3x}+2^{-3x})(2^{2x}+2^{-2x}) = 2^{3x}\cdot 2^{2x} + 2^{3x}\cdot 2^{-2x} + 2^{-3x}\cdot 2^{2x} + 2^{-3x}\cdot 2^{-2x}$

$= 2^{5x} + 2^x + 2^{-x} + 2^{-5x} = 32^x + 2^x + 2^{-x} + 32^{-x}$.

よって (1)①より $32^x + 32^{-x} = (8^x+8^{-x})(4^x+4^{-x}) - (2^x+2^{-x}) = 18\cdot 7 - 3 = 123$.

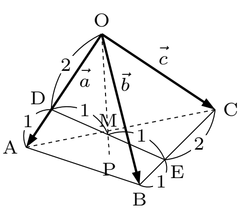
別解 (1) と同様に $(2^x+2^{-x})^5 = (2^x)^5 + 5\cdot(2^x)^4\cdot 2^{-x} + 10\cdot(2^x)^3\cdot(2^{-x})^2 + 10\cdot(2^x)^2\cdot(2^{-x})^3 + 5\cdot(2^x)^4\cdot 2^{-x} + (2^{-x})^5$

$= 32^x + 32^{-x} + 5(8^x+8^{-x}) + 10(2^x+2^{-x})$. $\therefore 3^5 = 32^x + 32^{-x} + 5\cdot 18 + 10\cdot 3$

よって $32^x + 32^{-x} = 3^5 - 5\cdot 18 - 10\cdot 3 = 123$.

問題 4. (1) $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{1+2} = \dfrac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}$.

(2)



$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{2}{3}\vec{a}$. $\therefore \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}}{2} = \dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{b} + \dfrac{1}{6}\vec{c}$,

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{s}{3}\vec{a} + \dfrac{s}{3}\vec{b} + \dfrac{s}{6}\vec{c}\cdots$①.

P は △ABC 上にあるから $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + u\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) + u(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})$.

$= \vec{a} + t(\vec{b}-\vec{a}) + u(\vec{c}-\vec{a}) = (1-t-u)\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}\cdots$②

①②より $\dfrac{s}{3} = 1-t-u$, $\dfrac{s}{3} = t$, $\dfrac{s}{6} = u$. これらを加えて $\dfrac{s}{3} + \dfrac{s}{3} + \dfrac{s}{6} = 1-t-u+t+u$. $\therefore \dfrac{5}{6}s = 1, s = \dfrac{6}{5}$.

①より $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{2}{5}\vec{a} + \dfrac{2}{5}\vec{b} + \dfrac{1}{5}\vec{c}$.

問題 5. (1) 1 辺の長さが $1, 2, 3, 4, 5$(cm) の立方体の体積はそれぞれ $1, 8, 27, 64, 125$(cm^3). $\dfrac{8}{1} = 8, \dfrac{27}{8} = 3.375,$

$\dfrac{64}{27} = 2.37\cdots, \dfrac{125}{64} = 1.95\cdots$. これ以外の組合せの場合はすべて 2.37 より大きいから 4cm と 5cm.

(2) (1) より $\dfrac{28^3}{21^3} = \dfrac{4^3}{3^3} = 2.37\cdots, \dfrac{30^3}{24^3} = \dfrac{5^3}{4^3} = 1.95\cdots$②.

$\dfrac{27^3}{21^3} = 2.125\cdots, \dfrac{26^3}{21^3} = 1.897\cdots$. 従って $k \leqq 25 \Rightarrow \dfrac{k^3}{21^3} < 1.897, k \geqq 29 \Rightarrow \dfrac{k^3}{21^3} > 2.37$.

$\dfrac{27^3}{22^3} = 1.848\cdots, \dfrac{28^3}{22^3} = 2.061\cdots$. 従って $k \leqq 26 \Rightarrow \dfrac{k^3}{22^3} < 1.848, k \geqq 29 \Rightarrow \dfrac{k^3}{22^3} > 2.061$.

$\dfrac{28^3}{23^3} = 1.804\cdots, \dfrac{29^3}{23^3} = 2.004\cdots$. 従って $k \leqq 27 \Rightarrow \dfrac{k^3}{23^3} < 1.804, k \geqq 30 \Rightarrow \dfrac{k^3}{23^3} > 2.004$.

②より $24 \leqq k < l \leqq 30 \Rightarrow \dfrac{l^3}{k^3} \leqq \dfrac{30^3}{24^3} = 1.95\cdots$.

以上により①の値が 2 に最も近くなる組合せは 23cm と 29cm である.

問題 6. (1) $xy + 3x - 2y - 6 = (y+3)x - 2(y+3) = (x-2)(y+3)$.

(2) $xy + 3x - 2y = 1 \Rightarrow xy + 3y - 2y - 6 = -5$. (1) より $(x-2)(y+3) = -5$. よって

$(x-2, y+3) = (-5, 1), (-1, 5), (1, -5), (5, -1)$. よって $(x, y) = (-3, -2), (1, 2), (3, -8)(7, -4)$.

問題 7. (1) $f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 6(x-1)(x-4)$. よって $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1, 4$.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	11	$\searrow$	-16	$\nearrow$

極大値 11 ($x = 1$), 極小値 -16 ($x = 4$).

(2) $f(0) = 0$ だから (1) より $t \geqq 4$.