微分積分 I

p. 117　第 4 章　練習問題 I-B

1. $y' = x^2 - 2x$ より点 $(-1, -2)$ における接線の傾きは $(-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 3$. よって接線の方程式は

$y + 2 = 3(x+1)$. $\therefore y = 3x + 1$.　曲線 $y = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - \dfrac{2}{3}$ と接線 $y = 3x + 1$ との交点の x 座標は連立方程式より

(接点の x 座標を 2 重解に含むから) $\dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - \dfrac{2}{3} - (3x+1) = \dfrac{1}{3}(x^3 - 3x^2 - 9x - 5) = \dfrac{1}{3}(x+1)^2(x-5)$, $\therefore x = -1, 5$.

$-1 \leqq x \leqq 5$ のとき $3x + 1 \geqq \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - \dfrac{2}{3}$ だから

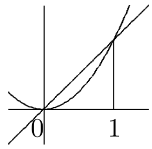
$S = \displaystyle\int_{-1}^{5} \left\{(3x+1) - \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{2}{3}\right)\right\} dx = -\frac{1}{3}\int_{-1}^{5}(x+1)^2(x-5)dx$.　$(x+1)^2$ を積分する部分積分により

$$S = -\frac{1}{3}\left[\frac{(x+1)^3}{3}(x-5)\right]_{-1}^{5} + \frac{1}{3}\int_{-1}^{5}\frac{(x+1)^3}{3}dx = -0 + 0 + \frac{1}{3}\left[\frac{(x+1)^4}{12}\right]_{-1}^{5} = \frac{1}{3}\cdot\frac{6^4}{12} - 0 = 36.$$

2. 放物線 $y = x^2$ と $y = x$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる立体は $y = x$ と x 軸,

直線 $x = 1$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる立体 (円錐) から放物線 $y = x^2$ と

x 軸, 直線 $x = 1$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる立体を取り去った立体である.



よってその体積は $V = \pi\displaystyle\int_0^1 x^2 dx - \pi\int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi\left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1\right) = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{15}\pi$

3. 円 $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ より $(y-b)^2 = a^2 - x^2$,　$y - b = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$,　$\therefore y = b \pm \sqrt{a^2 - x^2}$

よって上の半円の方程式は $y = b + \sqrt{a^2 - x^2}$. 下の半円の方程式は $y = b - \sqrt{a^2 - x^2}$.

(2) と同様に上の半円と x 軸, 直線 $x = -a, x = a$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる立体から

下の半円と x 軸, 直線 $x = -a, x = a$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる立体を取り去った立体が求める立体となるから

$$V = \pi\int_{-a}^{a}(b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 dx - \pi\int_{-a}^{a}(b - \sqrt{a^2 - x^2})^2 dx = \pi\int_{-a}^{a}\{(b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2\}dx$$

$$(b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2 = (b^2 + 2b\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 - x^2) - (b^2 - 2b\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 - x^2) = 4b\sqrt{a^2 - x^2}$$

よって $V = \pi\displaystyle\int_{-a}^{a} 4b\sqrt{a^2 - x^2})^2 dx = 8\pi b\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = 8\pi b \times \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$

$= 4\pi b(0 + a^2\mathrm{Sin}^{-1}1 - 0 - 0) = 2\pi^2 a^2 b$.　(p. 97 例題 13 参照)

4. 直径 AB の中点を原点 O, AB を x 軸が通り, $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$ とすると AB 上の点 $P(x, 0)$ において x 軸と垂直な

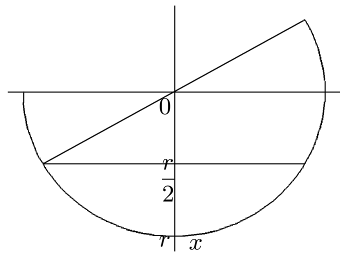
弦 CD の長さは $OD = a, OP = x$ より $PD = \sqrt{a^2 - x^2}$ となるから $CD = 2PD = 2\sqrt{a^2 - x^2}$.

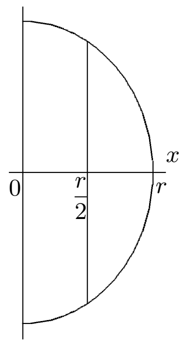
$\triangle CDE$ は直角二等辺三角形だから $CE : CD = 1 : \sqrt{2}$ よって $CE = DE = \sqrt{2}\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{2(a^2 - x^2)}$.

よって $\triangle CDE$ の面積は $S(x) = \dfrac{1}{2}\{\sqrt{2(a^2 - x^2)}\}^2 = a^2 - x^2$

従って求める立体の体積は $V = \displaystyle\int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)dx = 2\int_0^a (a^2 - x^2)dx = 2\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = 2\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{4a^3}{3}$.

5. 右図参照, 容器を水平に戻したときの上面の円の中心を原点として, 垂直な下方向を x 軸とする. これを $90°$ 回転して考えると図の半円を x 軸のまわりに回転してできる回転面が容器, 水は $\frac{r}{2} \leqq x \leqq r$ の部分に残るので, $0 \leqq x \leqq \frac{r}{2}$ の部分の水が流れ出ることになる. よって流れ出る水の量は





$$V = \pi \int_0^{\frac{r}{2}} (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_0^{\frac{r}{2}} (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{r}{2}} = \pi \left(\frac{r^3}{2} - \frac{r^3}{24} \right) = \frac{11}{24} \pi r^3$$