

83. (1) $x^2 + x + 1 = t$ とおく. (2) $x^3 - x^2 + 1 = t$ とおく. $\frac{f'}{f}$ を使う (3) $1 + \cos x = t$ とおく.
 (4) e^x の積分は e^x より e^{-2x} の積分は $-\frac{1}{2}e^{-2x}$. $\cos x$ の積分は $\sin x$ より $\cos \frac{x}{3}$ の積分は $3 \sin \frac{x}{3}$.
 (5) $\tan^{-1} x = t$ とおく. (6) $2x - 1 = t$ とおく.
84. (1) $1 + 8x = t$ とおく. (2) $-\frac{x^2}{2} = t$ とおく. (3) $\frac{x - \pi}{3} = t$ とおく. (4) $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ (半角の公式)
 (5) $x - 3 = t$ とおく. (6) $2x + 1 = t$ とおく.
85. 部分積分 (1) e^{2x} を積分 (2) $\sin \pi x$ を積分. 積分すると $-\frac{1}{\pi} \cos \pi x$ (3) $x + 1$ を積分 (4) x を積分.
 $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$ (5) x を積分. $\frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}$. $\frac{f'}{f}$ を使う (6) 2^x を積分. 積分すると $\frac{2^x}{\log 2}$
86. 部分積分 (1) e^{2x} を積分 (2) $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ を積分 (3) x^2 を積分 (部分積分を 2 回) (4) $(x-1)^4$ を積分 (部分積分を 2 回) (5) $1 \times \cos^{-1} x$ として 1 を積分, $1 - x^2 = t$ とおく (6) x を積分 $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$
87. (1) $\frac{\tan x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$ に注意. (3) $\frac{1}{\cos^2 x}$ を積分すると $\tan x$. よって

$$I = \int \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x \cdot \tan x - \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \tan x dx = \tan^2 x - I$$
ゆえに $2I = \tan^2 x$, $I = \frac{1}{2} \tan^2 x$
88. (1) 解答参照 $(x^3 + x)\sqrt{x^2 + 1} = x(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}$. $x^2 + 1 = t$ とおくと $2x dx = dt \therefore x dx = \frac{1}{2} dt$. 与式 $= \int t \sqrt{t} \frac{1}{2} dt$
 (2) 解答参照 $\frac{2x}{x^4 + 2x^2 + 5} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2 + 4}$. $x^2 + 1 = t$ とおくと $2x dx = dt \therefore x dx = \frac{1}{2} dt$. 与式 $= \int \frac{1}{t^2 + 4} \frac{1}{2} dt$
 (3) 解答参照 $(x^3 + 2x + 2) \div (x^2 + 2x + 2) = x - 2$ 余り $4x + 6$. よって $\frac{x^3 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 2} = x - 2 + \frac{4x + 6}{x^2 + 2x + 2}$
 $= x - 2 + \frac{4x + 6}{(x + 1)^2 + 1}$. $x + 1 = t$ とおくと $dx = dt$. 与式 $= \int x - 2 + \frac{4x + 6}{(x + 1)^2 + 1} dx = \frac{1}{2} x^2 - 2x + \int \frac{4t + 2}{t^2 + 1} dt$
 $\frac{4t + 2}{t^2 + 1} = \frac{4t}{t^2 + 1} + \frac{2}{t^2 + 1}$ として $\frac{f'}{f}$ と公式を使う.
 (4) 解答参照 $\sqrt{x} = t$ とおくと $x = t^2$ よって $dx = 2t dt$ ゆえに 与式 $= \int 2te^t dt$. e^t を積分して部分積分
 (5) 解答参照 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ よって $\sin^3 x \cos^2 x = (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \sin x$. $\cos x = t$ とおく.
 (6) 解答参照 半角の公式より $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$. よって
 $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1 - \cos^2 2x}{4} = \frac{\sin^2 2x}{4}$. 再び半角の公式を使って
 $\sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2}$ だから $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1 - \cos 4x}{8}$
 (7) 解答参照 $\sqrt[3]{x} = t$ とおくと $x = t^3$ よって $dx = 3t^2 dt$ ゆえに 与式 $= \int \frac{3t^2}{t + 1} dt$.
 $3t^2 \div (t + 1) = 3t - 3$ 余り 3. よって $\frac{3t^2}{t + 1} = 3t - 3 + \frac{3}{t + 1}$
 (8) 解答参照 $2 \log x = t$ とおくと $\log x = \frac{t}{2}$. $x = e^{\frac{t}{2}}$ よって $dx = \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}} dt$ ゆえに 与式 $= \int \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}} \sin t dt$. 公式を使う
89. (1) 解答参照 $e^x = t$ とおくと $x = \log t$ よって $dx = \frac{1}{t} dt$ ゆえに 与式 $= \int_1^e \frac{1}{t(t+1)} dt$. $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$
 (2) 解答参照 $1 \times (\log x)^3$ として 1 を積分する部分積分. 部分積分を繰り返す.

(3) 解答参照 $\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$ は偶関数だから 与式 $= 2 \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$. $x = 2 \sin \theta$ とおくと $dx = 2 \cos \theta d\theta$.

$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 \theta} = \sqrt{4\cos^2 \theta} = 2 \cos \theta$. よって 与式 $= 8 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 \theta d\theta$. 半角の公式

(4) 解答参照 $4x-x^2 = -(x^2-4x) = -(x-2)^2+4$. $x-2=t$ とおくと 与式 $= \int_{-1}^0 \frac{t+2}{\sqrt{4-t^2}} dx$.

$x = 2 \sin \theta$. $\frac{t}{\sqrt{4-t^2}}$ については $4-t^2 = u$ とおくと $\frac{2}{\sqrt{4-t^2}}$ については公式

(5) 解答参照 x^2 を積分する部分積分. $\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$. $\frac{f'}{f}$ を使う

(6) 解答参照 $\sqrt{e^x-1} = t$ とおくと $e^x-1 = t^2$. $e^x dx = 2t dt$. よって 与式 $= \int_0^2 \frac{2t^2}{t^2+4} dx$. $\frac{2t^2}{t^2+4} = 2 - \frac{8}{t^2+4}$

90. (1) 解答参照 積を和・差に直す公式より $\sin mx \sin nx = -\frac{1}{2} \{ \cos(m+n)x - \cos(m-n)x \}$.

$m = n$ のとき $\cos(m-n)x = \cos 0 = 1$ だから $\int_0^{2\pi} \cos(m-n)x dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi$.

その他の積分は $\int_0^{2\pi} \cos(m \pm n)x dx = \left[\frac{1}{m \pm n} \sin(m \pm n)x \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{m \pm n} \{ \sin 2(m \pm n)\pi - \sin 0 \} = 0$.

(2) 解答参照 積を和・差に直す公式より $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} \{ \sin(m+n)x + \sin(m-n)x \}$.

$m = n$ のときも $\sin(m-n)x = \sin 0 = 0$. 以下同様

91. 解答参照 e^x を積分する部分積分. $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^x dx = [x^{n+1} e^x]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n e^x dx$

$= e - 0 - (n+1) \int_0^1 x^n e^x dx = e - (n+1)I_n$.

92. 解答参照 左辺 $= \int_a^{2\pi} f(x) dx + \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(x) dx$. $x-2\pi = t$ とおくと $x = t+2\pi$. $dx = dt$.

x	2π	\rightarrow	$a+2\pi$
t	0	\rightarrow	a

よって 左辺 $= \int_a^{2\pi} f(x) dx + \int_0^a f(t+2\pi) dt$. $f(x)$ は周期 2π の周期関数だから $f(t+2\pi) = f(t)$.

よって 左辺 $= \int_a^{2\pi} f(x) dx + \int_0^a f(t) dt = \int_0^a f(x) dx + \int_a^{2\pi} f(x) dx =$ 右辺.

93. 解答参照 $x = \frac{\pi}{2} - t$ とおくと $dx = -dt$. $t = \frac{\pi}{2} - x$.

x	0	\rightarrow	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$	\rightarrow	$-\frac{3\pi}{2}$

左辺 $= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right) (-dt) = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right) dt$. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \cos t$ だから.

左辺 $= \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt$. $\cos t$ は周期 2π の周期関数だから $f(\cos t)$ も同じ. よって前題 92 で $a = -\frac{3\pi}{2}$ とすると

$a+2\pi = -\frac{3\pi}{2} + 2\pi = \frac{\pi}{2}$ となるから $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt = \int_0^{2\pi} f(\cos t) dt =$ 右辺