微分積分 I 問題集の補足

p. 47

102. (1) $y=e^x$ と $y=e^{-x}$ との交点の x 座標は $x=0$. $0 \leqq x \leqq 2$ において $e^x \geqq e^{-x}$ だから $S=\displaystyle\int_0^2 (e^x-e^{-x})dx$

(2) $y=x(x+1)(x-3)$ と x 軸 $(y=0)$ との交点の x 座標は $x=0,-1,3$. $-1 \leqq x \leqq 0$ において $x(x+1)(x-3) \geqq 0$.

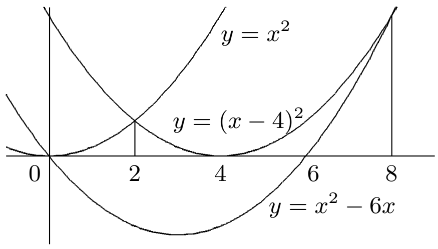
$0 \leqq x \leqq 3$ において $x(x+1)(x-3) \leqq 0$ だから $S=\displaystyle\int_{-1}^0 \{x(x+1)(x-3)-0\}dx+\int_0^3 \{0-x(x+1)(x-3)\}dx$.

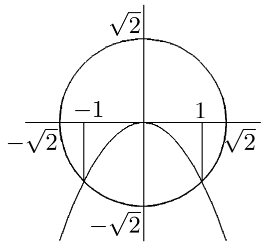
(3) $y=x^2-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{8}{3}$ と $y=-x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{3}$ との交点の x 座標は $x=-1,2$. $-1 \leqq x \leqq 2$ において

$x^2-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{8}{3} \leqq -x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{3}$ だから $S=\displaystyle\int_{-1}^2 \left\{-x^2+\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}-\left(x^2-\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}\right)\right\}dx$

(4) $y=\dfrac{1}{x}$ と $y=\dfrac{x}{4}$ との交点の x 座標は $x=\pm 2$. $1 \leqq x \leqq 2$ において $\dfrac{1}{x} \geqq \dfrac{x}{4}$. $2 \leqq x \leqq 3$ において $\dfrac{1}{x} \leqq \dfrac{x}{4}$

だから $S=\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x}-\frac{x}{4}\right)dx+\int_2^3 \left(\frac{x}{4}-\frac{1}{x}\right)dx$.





103. (1) $y=x^2$ と $y=(x-4)^2$ との交点の x 座標は $x=2$. $y=x^2$ と $y=x^2-6x$ との交点の x 座標は $x=0$.

$y=(x-4)^2$ と $y=x^2-6x$ との交点の x 座標は $x=8$. グラフは上左図のようになる.

よって $S=\displaystyle\int_0^2 \{x^2-(x^2-6x)\}dx+\int_2^8 \{(x-4)^2-(x^2-6x)\}dx$

(2) $x^2+y^2=2$ と $y=-x^2$ との交点の x 座標は $x=\pm 1$. 円の方程式式 $x^2+y^2=2$ より $y^2=2-x^2$. $y=\pm\sqrt{2-x^2}$.

よって x 軸より上の半円の方程式は $y=\sqrt{2-x^2}$. x 軸より下の半円の方程式は $y=-\sqrt{2-x^2}$. グラフは上右図

のようになるから

$$S=\int_{-\sqrt{2}}^{-1} \{\sqrt{2-x^2}-(-\sqrt{2-x^2})\}dx+\int_{-1}^{1} \{\sqrt{2-x^2}-(-x^2)\}dx+\int_1^{\sqrt{2}} \{\sqrt{2-x^2}-(-\sqrt{2-x^2})\}dx$$

104. (1) 接線の公式 (2 章§ 1) 参照　(2) 連立方程式. 接点の座標 $(x=1)$ が 2 重解になることに注意

105. (1) $y'=\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$　(2) $1+(y')^2=1+\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2x}\right)^2=1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2-2\cdot\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2x}+\left(\dfrac{1}{2x}\right)^2$

$$=1+\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2x}\right)^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2x}\right)^2=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)^2$$

(3) $$y'=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})'}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1+\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}(x^2-1)'}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{(x+\sqrt{x^2-1})\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

106. (2) $y=\sqrt{x^2-4}$ と x 軸 $(y=0)$ との交点の x 座標は $x=2$.

107. (3) グラフ求める体積は (2) で求めた体積から曲線 $y=2x^2$, x 軸および $x=-1$, $x=1$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる図形の体積を引いたもの.

108. (1) $\sqrt{}$ の中を $=t$ とおく置換積分.　(2) $e^x=t$ とおく置換積分.

109. 解答参照

110. 解答参照 (t, t^2+1) における接線の方程式は $f'(t) = 2t$ より $y-(t^2+1) = 2t(x-t)$. よって $y = 2tx - t^2 + 1$.

これと放物線 $y = x^2$ の交点は $x^2 = 2tx - t^2 + 1$, より $x^2 - 2tx + t^2 - 1 = x^2 - 2tx + (t-1)(t+1)$.

$y = x^2$ は下に凸だから $S = \displaystyle\int_{t-1}^{t+1} \{(2tx - t^2 + 1) - x^2\}dx = \left[tx^2 + (-t^2+1)x - \frac{x^3}{2}\right]_{t-1}^{t+1}$

$= t\{(t+1)^2 - (t-1)^2\} + (-t^2+1)\{(t+1)-(t-1)\} - \dfrac{(t+1)^3 - (t-1)^3}{3} = 4t^2 + 2(-t^2+1) - \dfrac{6t^2+2}{3} = \dfrac{4}{3}$

111. 直径 AB の中点を原点, AB を x 軸が通り, $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$ とすると AB 上の点 $P(x, 0)$ において x 軸と垂直な面で切った切り口の断面は $\triangle PQR$ となる. ここで Q は直円柱の底面の円周上の点で $x^2 + PQ^2 = a^2$ だから

$PQ = \sqrt{a^2 - x^2}$. また題意より $\angle RPQ = 30^\circ$, $\angle RQP = 90^\circ$ だから $QR = \dfrac{1}{\sqrt{3}}PQ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2-x^2}$. よって断面積

$S(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(a^2 - x^2)$. $\therefore$ 体積 $V = \displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{1}{2\sqrt{3}}(a^2-x^2)dx$

112. 解答参照 P は原点から $(1, 0)$ まで移動するので $P(t, 0) \quad (0 \leqq t \leqq 1)$ とする. P を通り x 軸に垂直な直線は $x = t$ だから, これと放物線 $y^2 = 4x$ との交点は $y^2 = 4t$ より $y = \pm\sqrt{4t} = \pm 2\sqrt{t}$. よって $Q(t, -2\sqrt{t}), R(t, 2\sqrt{t})$.

従って $QR = 4\sqrt{t}$. 二等辺三角形の等辺を a とすると底辺は $QR = 4\sqrt{t}$, QR に向かい合う頂角は 30° だから

余弦定理より $16t = QR^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a\cos 30^\circ$. よって $16t = 2a^2 - 2a^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = (2-\sqrt{3})a^2$.

ゆえに $a^2 = \dfrac{16t}{2-\sqrt{3}} = \dfrac{16t(2+\sqrt{3})}{4-3} = 16(2+\sqrt{3})t$. 三角形の面積の公式より二等辺三角形の面積は

$\dfrac{1}{2}a \cdot a\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}a^2 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{16(2+\sqrt{3})t}{4} = 4(2+\sqrt{3})t$. $\therefore V = \displaystyle\int_0^1 4(2+\sqrt{3})tdt$

113. 例題, 解答参照 曲線 $x = f(y)$, 曲線 $x = g(y)$ と直線 $y = a$, 直線 $y = b$($a \leqq b$, $a \leqq y \leqq b$ において $f(y) \geqq g(y)$ とする) で囲まれた図形の面積は $S = \displaystyle\int_a^b \{f(y) - g(y)\}dy$

114. 解答参照 曲線 $x = f(y) (\geqq 0)$ と直線 $y = a$, 直線 $y = b$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積は $V = \pi\displaystyle\int_a^b f(y)^2dy = \pi\int_a^b x^2dy$

115. 解答参照

116. (1) 例題, 解答参照 解と係数の関係を使っているので注意　(2), 117 も (1) と同様

118. 解答参照 接線の方程式を $y = px+q$ とおくと接点, 交点の x 座標 α, β は連立方程式 $\begin{cases} y = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \\ y = px + q \end{cases}$

の解だから $ax^3 + bx^2 + cx + d = px + q$ 従って $ax^3 + bx^2 + cx + d - (px+q) = 0$ の解. よって左辺の 3 次式は

$(x-\alpha), (x-\beta)$ を因数にもつ (因数定理). しかも接点であることから α は 2 重解だから $(x-\alpha)^2$ が因数となる.

x^3 の係数を考慮すると $ax^3 + bx^2 + cx + d - (px+q) = a(x-\alpha)^2(x-\beta)$ となる.

$\alpha > \beta$ のとき $\beta \leqq x \leqq \alpha$ において $x - \beta \geqq 0$. よって $a > 0, (x-\alpha)^2 \geqq 0$ より

$ax^3 + bx^2 + cx + d - (px+q) = a(x-\alpha)^2(x-\beta) \geqq 0$. $\therefore S = \displaystyle\int_\beta^\alpha a(x-\alpha)^2(x-\beta)dx$

$(x-\alpha)^2$ を積分, $(x-\beta)$ を微分する部分積分.

$S = a\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3(x-\beta)\right]_\beta^\alpha - a\int_\beta^\alpha \frac{1}{3}(x-\alpha)^3 dx = 0 - 0 - a\left[\frac{1}{12}(x-\alpha)^4\right]_\beta^\alpha = -0 + \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$

$\alpha < \beta$ のとき $\alpha \leqq x \leqq \beta$ において $x - \beta \leqq 0$. よって $a > 0, (x-\alpha)^2 \geqq 0$ より

$ax^3 + bx^2 + cx + d - (px+q) = a(x-\alpha)^2(x-\beta) \leqq 0$. $\therefore S = \displaystyle\int_\alpha^\beta \{-a(x-\alpha)^2(x-\beta)\}dx$

$(x-\alpha)^2$ を積分, $(x-\beta)$ を微分する部分積分.

$S = -a\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3(x-\beta)\right]_\alpha^\beta + a\int_\alpha^\beta \frac{1}{3}(x-\alpha)^3 dx = -0 + 0 + a\left[\frac{1}{12}(x-\alpha)^4\right]_\alpha^\beta = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 - 0$