補章　§ 1. (続) 関数の展開

p. 147 練習問題 1-A

1. (1) $\dfrac{1}{n} = x$ とおくと $n = \dfrac{1}{x}$. また $n \to \infty$ のとき $x \to 0$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(e^x - 1) = \frac{e^x - 1}{x}$

これは $\dfrac{0}{0}$ の不定形だからロピタルの定理を使って $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1.$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log(1+n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to\infty} \log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\log(1+x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\log(1+x)}{x}$

これは $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形だからロピタルの定理を使って $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log(1+n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 0.$

2. (1) $n \geqq 4$ のとき $\dfrac{2^n}{n!} = \dfrac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdots 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots n} \leqq \dfrac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdots 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 4\cdots 4} = \dfrac{2\cdot 2\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\dfrac{2}{4}\right)^{n-3} = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$

よって $\dfrac{2^n}{n!} \leqq \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ は初項 $\dfrac{2}{3}$, 公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比級数であり. $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$ より収束する.

(1) より $n \geqq 4$ のとき $\dfrac{2^n}{n!} \leqq \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$ だから $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ も収束する. よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ も収束する.

3. (1) $s > 1$ のとき $\dfrac{1}{2^s} + \dfrac{1}{3^s} + \cdots + \dfrac{1}{n^s} < \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^s}dx$

よって $S_n < 1 + \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^s}dx = 1 + \left[\frac{x^{1-s}}{1-s}\right]_1^n = 1 + \frac{n^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s}.$

$s > 1$ より $1 - s < 0$ で $1 - s = -s + 1 = -(s-1)$. よって $S_n < 1 - \dfrac{n^{-(s-1)}}{s-1} + \dfrac{1}{s-1} < 1 + \dfrac{1}{s-1}.$

よって級数は収束する.

(2) $s = 1$ のときは例題 2 で証明された. $s < 1$ のとき

$S_n = 1 + \dfrac{1}{2^s} + \dfrac{1}{3^s} + \cdots + \dfrac{1}{n^s} > \displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{x^s}dx = \left[\frac{x^{1-s}}{1-s}\right]_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s}$

$s < 1$ より $1 - s > 0$ よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{1-s}}{1-s} = \infty$ よって級数は発散する.

4. (1) $f(x) = \dfrac{1}{1+2x}$ とすると $f'(x) = -2(1+2x)^{-2},\ f''(x) = 8(1+2x)^{-3}$,

$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! 2^n (1+2x)^{-(n+1)}$. $f(0) = 1,\ f'(0) = -2,\ f''(0) = 8, \cdots, f^{(n)}(0) = (-1)^n n! 2^n$ だから

$\dfrac{1}{1+2x} = 1 - 2x + \dfrac{8}{2!}x^2 - \cdots + (-1)^n \dfrac{n!2^n}{n!}x^n + \cdots = 1 - 2x + 4x^2 - \cdots + (-1)^n 2^n x^n + \cdots$

このベキ級数は初項 1 公比 $-2x$ の等比級数だから $|-2x| < 1$ のときに限り, よって $|x| < \dfrac{1}{2}$ のときに限り収束する.

よって収束半径は $R = \dfrac{1}{2}$.

(2) (1) のマクローリン展開の式を 0 から x まで積分すると

左辺 $= \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+2x}dx = \left[\frac{1}{2}\log(1+2x)\right]_0^x = \frac{1}{2}\log(1+2x) - \frac{1}{2}\log 1 = \frac{1}{2}\log(1+2x)$

右辺 $= x - x^2 + \dfrac{4}{3}x^3 - \cdots + (-1)^n \dfrac{2^n}{n+1}x^{n+1} \cdots$.

よって $\dfrac{1}{2}\log(1+2x) = x - x^2 + \dfrac{4}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{2^{n-1}}{n}x^n \cdots$.

よって $\log(1+2x) = 2x - 2x^2 + \dfrac{8}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{2^n}{n}x^n \cdots$. 収束半径は $\dfrac{1}{2}$.

5. (1)$(\sin x)^{(5)} = \cos x$ だから $\sin x = x - \dfrac{1}{3!}x^3 + R_5 = x - \dfrac{x^3}{6} + R_5$.　$R_5 = \dfrac{\cos\theta x}{5!}x^5 = \dfrac{\cos\theta x}{120}x^5$.

(2) (1) より $\sin 0.5 \fallingdotseq 0.5 - \dfrac{(0.5)^3}{6} = 0.479166\cdots$ よって $\sin 0.5 \fallingdotseq 0.47917$

$|R_5| = \dfrac{|\cos 0.5\theta|}{120}(0.5)^5 \leqq \dfrac{(0.5)^5}{120} = 0.0002604\cdots$ よって誤差の限界は 0.00027

6. (1) $f(x) = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ とすると $f^{(2n)}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $f^{(2n+1)}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

よって $f(0) = f^{(2n)}(0) = 0$, $f^{(2n+1)}(0) = 1$. よって $f(x) = x + \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{5!}x^5 + \cdots + \dfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$

$R_{2n+2} = \dfrac{e^{\theta x} - e^{-\theta x}}{2(2n+2)!}x^{2n+2}$. $\theta x \leqq |\theta x| \leqq |x|$, $-\theta x \leqq |\theta x| \leqq |x|$ より

$\dfrac{|e^{\theta x} - e^{-\theta x}|}{2} \leqq \dfrac{e^{|x|} + e^{|x|}}{2} = e^{|x|}$ だから $|R_{2n+2}| \leqq e^{|x|}\dfrac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$. よって $\lim_{n\to\infty} R_{2n+2} = 0$

よって任意の x について $f(x) = x + \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{5!}x^5 + \cdots + \dfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$

(2) $f(x) = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ とすると $f^{(2n)}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $f^{(2n+1)}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

よって $f(0) = f^{(2n)}(0) = 1$, $f^{(2n+1)}(0) = 0$. よって $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{4!}x^4 + \cdots + \dfrac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$

$R_{2n+1} = \dfrac{e^{\theta x} - e^{-\theta x}}{2(2n+1)!}x^{2n+1}$. $\theta x \leqq |\theta x| \leqq |x|$, $-\theta x \leqq |\theta x| \leqq |x|$ より

$\dfrac{|e^{\theta x} - e^{-\theta x}|}{2} \leqq \dfrac{e^{|x|} + e^{|x|}}{2} = e^{|x|}$ だから $|R_{2n+1}| \leqq e^{|x|}\dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$. よって $\lim_{n\to\infty} R_{2n+1} = 0$

よって任意の x について $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{4!}x^4 + \cdots + \dfrac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$

p.148　1-B

1. $f(x) = \log\dfrac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x)$ とおくと $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x}$, $f''(x) = -(1+x)^{-2} + (1-x)^{-2}$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} -(n-1)!(1+x)^{-n} + (n-1)!(1-x)^{-n} & (n\text{ が偶数のとき}) \\ (n-1)!(1+x)^{-n} + (n-1)!(1-x)^{-n} & (n\text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

$f(0) = f''(0) = f^{(4)}(0) = f^{(6)}(0) = 0$, $f'(0) = 2$, $f'''(0) = 2\cdot 2!$, $f^{(5)}(0) = 2\cdot 4!$, $f^{(7)}(0) = 2\cdot 6!$

$\log\dfrac{1+x}{1-x} = 2x + \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{2}{5}x^5 + \dfrac{2}{7}x^7 + \cdots$. ここで $x = \dfrac{1}{2}$ とおくと　左辺 $= \log\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \log\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \log 3$

右辺 $= 2\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + \dfrac{2}{5}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 + \dfrac{2}{7}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^7 = 1.0980\cdots$

2. (1) $\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{2} = \alpha, \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{3} = \beta$ とすると $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}, \tan\beta = \dfrac{1}{3}, 0 < \alpha, \beta < \dfrac{\pi}{2}$.

tan の加法定理により $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$ 従って $\tan(\alpha+\beta) = 1$.

$0 < \alpha, \beta < \dfrac{\pi}{2}$ より $0 < \alpha + \beta < \pi$ だから $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$.　$\therefore \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{2} + \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$.

(2) $\mathrm{Tan}^{-1}x \fallingdotseq x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{5}x^5$ より $\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{2} \fallingdotseq \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + \dfrac{1}{5}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = 0.464583\cdots$

$\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{3} \fallingdotseq \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 + \dfrac{1}{5}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^5 = 0.321810\cdots$ よって (1) より $\dfrac{\pi}{4} \fallingdotseq 0.786394\cdots$.

ゆえに $\pi \fallingdotseq 3.14557\cdots$　　$\pi = 3.1456$

3. $f(x) = (1+x)^\alpha$ とおくと $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \cdots$

$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}$,　$f(0) = 1$, $f'(0) = \alpha$, $f''(0) = \alpha(\alpha-1), \cdots$

$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))$ よってマクローリンの定理より

$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n.$

$R_n=\dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+\theta x)^{\alpha-n}}{n!}x^n,\ 0<\theta<1$

4. (1) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ より 3 の結果で $\alpha=-\dfrac{1}{2}$ とおき, x を $-x^2$ に置き換えると

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-x^2)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(-x^2)^3+\cdots$$
$$=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^6+\cdots$$

(2) (1) の両辺を 0 から x まで積分すると　左辺 $=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\left[\mathrm{Sin}^{-1}x\right]_0^x=\mathrm{Sin}^{-1}x-\mathrm{Sin}^{-1}0=\mathrm{Sin}^{-1}x.$

右辺 $=x+\dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1\cdot3}{2\cdot4}\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\dfrac{x^7}{7}+\cdots$　よって

$\mathrm{Sin}^{-1}x=x+\dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1\cdot3}{2\cdot4}\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\dfrac{x^7}{7}+\cdots$

5. (1) (i) $n=2$ のとき $f'(x)=\{(1+x)^{\frac{1}{2}}\}'=\dfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}(1+x)'=\dfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ よって

左辺 $=f''(x)=\left\{\dfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\right\}'=-\dfrac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}(1+x)'=-\dfrac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$

右辺 $=\dfrac{(-1)^{2+1}(4-3)!}{2^{4-2}(2-2)!}(1+x)^{-\frac{4-1}{2}}=-\dfrac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$　よって成り立つ

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると $f^{(k)}(x)=\dfrac{(-1)^{k+1}(2k-3)!}{2^{2k-2}(k-2)!}(1+x)^{-\frac{2k-1}{2}}$　両辺を微分すると

$$f^{(k+1)}(x)=\frac{(-1)^{k+1}(2k-3)!}{2^{2k-2}(k-2)!}\left(-\frac{2k-1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{2k+1}{2}}(1+x)'$$
$$=\frac{(-1)^{k+2}(2k-1)(2k-3)!}{2^{2k-1}(k-2)!}(1+x)^{-\frac{2k+1}{2}}=\frac{(-1)^{k+2}(2k-1)(2k-3)!}{2^{2k-1}(k-2)!}\frac{2k-2}{2k-2}(1+x)^{-\frac{2k+1}{2}}$$
$$=\frac{(-1)^{k+2}(2k-1)(2k-3)!}{2^{2k-1}(k-2)!}\frac{2k-2}{2(k-1)}(1+x)^{-\frac{2k+1}{2}}=\frac{(-1)^{k+2}(2k-1)(2k-2)(2k-3)!}{2^{2k}(k-1)(k-2)!}(1+x)^{-\frac{2k+1}{2}}$$
$=\dfrac{(-1)^{k+2}(2k-1)!}{2^{2k}(k-1)!}(1+x)^{-\frac{2k+1}{2}}$ よって $n=k+1$ のときも成り立つ

(i)(ii) より数学的帰納法により $n\geqq2$ であるすべての自然数について成り立つ

(2) (1) より $f(0)=1,\ f'(0)=\dfrac{1}{2},\ f^n(0)=\dfrac{(-1)^{n+1}(2n-3)!}{2^{2n-2}(n-2)!}$ よってマクローリン展開は

$\sqrt{1+x}=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+\cdots+\dfrac{(-1)^{n+1}(2n-3)!}{2^{2n-2}(n-2)!n!}x^n+\cdots$

$0\leqq x\leqq1$ のとき ラグランジュの剰余項は $R_n=\dfrac{(-1)^{n+1}(2n-3)!(1+\theta x)^{-\frac{2n-1}{2}}}{2^{2n-2}(n-2)!n!}x^n$ よって

$|R_n|=\dfrac{(2n-3)!}{2^{2n-2}(n-2)!n!(1+\theta x)^{\frac{2n-1}{2}}}|x|^n\leqq\dfrac{(2n-3)!}{2^{2n-2}(n-2)!n!}|x|^n$

ここで $(2n-3)!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots(2n-5)(2n-4)(2n-3)$

$<2\cdot2\cdot4\cdot4\cdots(2n-4)(2n-4)(2n-2)$

$=2^{2n-3}\cdot1\cdot1\cdot2\cdot2\cdots(n-2)(n-2)(n-1)=2^{2n-3}(n-2)!(n-1)!$

よって $(2n-3)!<2^{2n-3}(n-2)!(n-1)!\quad\cdots(*)$

(*) より $(2n-3)!<2^{2n-2}(n-2)!n!$ だから $|R_n|<|x|^n$ よって $|x|<1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_n=0$

$-1<x<0$ のとき コーシーの剰余項は $R_n=\dfrac{(-1)^{n+1}(2n-3)!(1+\theta x)^{-\frac{2n-1}{2}}}{2^{2n-2}(n-2)!(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}x^n$ よって

$|R_n|=\dfrac{(2n-3)!(1-\theta)^{n-1}}{2^{2n-2}(n-2)!(n-1)!(1+\theta x)^{\frac{2n-1}{2}}}|x|^n$ (*) より $(2n-3)!<2^{2n-2}(n-2)!(n-1)!$ だから

$|R_n|<\dfrac{(1-\theta)^{n-1}}{(1+\theta x)^{\frac{2n-1}{2}}}|x|^n=\dfrac{1}{(1+\theta x)^{\frac{1}{2}}}\left(\dfrac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}|x|^n$

例題 6 と同様にして $1+\theta x>1+x>0,\ 1+\theta x>1-\theta>0$ よって $|R_n|<\dfrac{|x|^n}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}$

よって $|x|<1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_n=0$

以上により $|x|<1$ のとき級数は収束する.

$|x|>1$ のとき $(2n-3)!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots(2n-5)(2n-4)(2n-3)$

$>1\cdot2\cdot2\cdot4\cdots(2n-6)(2n-4)(2n-4)$

$=2^{2n-4}\cdot1\cdot1\cdot1\cdot2\cdots(n-3)(n-2)(n-2)=2^{2n-4}(n-2)!(n-2)!$

よって $(2n-3)!>2^{2n-4}(n-2)!(n-2)!$. ゆえにマクローリン展開の n 次の項の絶対値は

$|a_nx^n|=\left|\dfrac{(-1)^{n+1}(2n-3)!}{2^{2n-2}(n-2)!n!}x^n\right|>\dfrac{2^{2n-4}(n-2)!(n-2)!}{2^{2n-2}(n-2)!n!}|x|^n=\dfrac{|x|^n}{2^2n(n-1)}$

$|x|>1$ だから p. 131 の不定形の極限の公式 (1) より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{|x|^n}{n^2}=\infty$

よって a_nx^n は発散するので級数も発散する. すなわち収束半径は 1 である.