3A 数学 AI レポート

第１章　関数の展開　§１　関数の展開

p. 7

5. (6)　$-1 \leqq \sin\dfrac{n}{2} \leqq 1$ よって $\left|\sin\dfrac{n}{2}\right| \leqq 1, 0 \leqq \left|\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n}{2}\right| \leqq \dfrac{1}{n} \to 0$

　よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n}{2} = 0$

6. (3)　$\{a_n\}$ は $1, 0, -3, 0, 5, \cdots$ よって振動 (発散)

　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ($r = \dfrac{1}{2}$ の等比数列, $|r| < 1$ だから)

　　$\{(-3)^n\}$ 振動 ($r = -3$ の等比数列, $r < -1$ だから)　よって振動 (発散)

　(5) $\dfrac{2^n + (-1)^n}{3^n} = \dfrac{2^n}{3^n} + \dfrac{(-1)^n}{3^n} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n \to 0 + 0$

　(6) $\dfrac{3^n + 4}{4^n + 3} = \dfrac{\frac{3^n}{4^n} + \frac{4}{4^n}}{1 + \frac{3}{4^n}}$

　　$\dfrac{3^n}{4^n} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \to 0$ ($r = \dfrac{3}{4}$ の等比数列, $|r| < 1$ だから)　$\dfrac{4}{4^n}, \dfrac{3}{4^n} \to \dfrac{4}{\infty}, \dfrac{3}{\infty} = 0$

10. (2) 合成関数の微分法や積の微分法により $(\cos x + \sin^3 x)' = -\sin x + 3\sin^2 x\cos x$,

　　$(\cos x + \sin^3 x)'' = -\cos x + 6\sin x\cos^2 x - 3\sin^3 x$,

　　$(\cos x + \sin^3 x)''' = \sin x + 6\cos^3 x - 21\sin^2 x\cos x$

11. (1) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)(-2)\cdots(-n)x^{-(n+1)} = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$

　(2) $(\log x)^{(n)} = (-1)^{(n-1)}(n-1)!x^{-n}$

15. (1) 解答参照 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right)$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

18. (1) $a = 1, r = x(3-4x)$ よって $|x(3-4x)| < 1$, ゆえに $-1 < 3x - 4x^2 < 1$

　　すなわち $4x^2 - 3x - 1 < 0, 4x^2 - 3x + 1 > 0$

　　1 番目の方程式より $(x-1)(4x+1) < 0$ よって $-\dfrac{1}{4} < x < 1$.

　　また $4x^2 - 3x + 1 = (2x - \dfrac{3}{4})^2 + \dfrac{7}{16} > 0$ だから 2 番目の方程式の解はすべての実数.

　　よって収束する x の範囲は $-\dfrac{1}{4} < x < 1$. 和は $\dfrac{1}{1 - x(3-4x)} = \dfrac{1}{4x^2 - 3x + 1}$

　(2) $a = 1, r = \dfrac{1}{1+x}$ よって $\left|\dfrac{1}{1+x}\right| < 1$, ゆえに $|1 + x| > 1$

　　すなわち $1 + x < -1, 1 < 1 + x$ よって収束する x の範囲は $\cdots$

　　和は $\dfrac{1}{1 - \frac{1}{1+x}} = \cdots$