95. 解答参照 (1)$\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \log|\sin x|$ と $\displaystyle\log\frac{1}{\sqrt{2}} = \log 2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\log 2$ に注意

(2) 半角の公式より $\displaystyle\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$

$$\sin^4\theta = (\sin^2\theta)^2 = \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 = \frac{1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta}{4} = \frac{1-2\cos 2\theta+\dfrac{1+\cos 4\theta}{2}}{4}.$$

96. 解答参照 (2) $\displaystyle u = \frac{x^2}{y},\ v = \frac{y^2}{x}$ より $\displaystyle u^2v = \frac{x^4}{y^2}\cdot\frac{y^2}{x} = x^3 \quad \therefore x = \sqrt[3]{u^2v} = u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}}$

どうようにして $y = \sqrt[3]{uv^2} = u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}$. よって $\displaystyle\frac{\partial x}{\partial u} = x_u = \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}},\ \frac{\partial x}{\partial v} = x_v = \frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{2}{3}}$

$\displaystyle\frac{\partial y}{\partial u} = y_u = \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}},\ \frac{\partial y}{\partial v} = y_v = \frac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}}$. ゆえに $J = \cdots$

97. 解答参照 r の範囲 $\displaystyle\epsilon \leqq r \leqq \frac{1}{\sin\theta}$ について r が最大となるのは解答の図の矢印がさす直角三角形の斜辺のときで, このとき $\displaystyle\sin\theta = \frac{1}{\text{斜辺}}$. よって斜辺 $\displaystyle= \frac{1}{\sin\theta}$.

$\cos\theta = t$ とおくと $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}d\theta = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \frac{-dt}{1-t^2} =$ とおくと $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt = \cdots$

98. 解答参照. 領域については教科書 p. 80 例題 4 も参照 ($a=2$ の場合)

99. 解答参照

100. 例題, 解答参照. 例題同様 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いてよい.

(1) $(x-1)^2e^{-x^2} = (x^2-2x+1)e^{-x^2} = x^2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} + e^{-x^2}$ ここで $x^2e^{-x^2}$ と e^{-x^2} は偶関数, xe^{-x^2} は奇関数. よって例題より $\cdots$

(3)$\sqrt{x} = t$ とおくと $x = t^2$. よって $dx = 2tdt$

(4) $\displaystyle\sqrt{\log\frac{1}{x}} = t$ とおくと $\displaystyle\log\frac{1}{x} = t^2$. $\displaystyle\log\frac{1}{x} = -\log x$ だから $\log x = -t^2,\ x = e^{-t^2}$.

よって $dx = e^{-t^2}(-2t)dt$.

101. 解答参照.

102. 解答参照 $y+x^2 = u,\ y-x^2 = v$ とおくと $u+v = 2y,\ u-v = 2x^2$ よって $\displaystyle y = \frac{u+v}{2},\ x^2 = \frac{u-v}{2}$.

$x > 0$ より $\displaystyle x = \sqrt{\frac{u-v}{2}}$.

$\displaystyle\frac{\partial x}{\partial u} = x_u = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}(u-v)^{-\frac{1}{2}}(u-v)_u = \frac{1}{2\sqrt{2(u-v)}}$,

$\displaystyle\frac{\partial x}{\partial v} = x_v = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}(u-v)^{-\frac{1}{2}}(u-v)_v = -\frac{1}{2\sqrt{2(u-v)}}$. よって $J = \cdots$

領域については $\displaystyle y = \frac{u+v}{2},\ x^2 = \frac{u-v}{2}$ を $y \leqq x^2,\ y \leqq -x^2+2,\ \displaystyle y \geqq -\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}$ に代入.