

$$127. (1) W(e^{-x} \cos 3x, e^{-x} \sin 3x) = \begin{vmatrix} e^{-x} \cos 3x & e^{-x} \sin 3x \\ -e^{-x} \cos 3x - 3e^{-x} \sin 3x & -e^{-x} \sin 3x + 3e^{-x} \cos 3x \end{vmatrix}$$

$$= e^{-x} \cos 3x \cdot (-e^{-x} \sin 3x + 3e^{-x} \cos 3x) - e^{-x} \sin 3x \cdot (-e^{-x} \cos 3x - 3e^{-x} \sin 3x)$$

$$= -e^{-2x} \sin 3x \cos 3x + 3e^{-2x} \cos^2 3x + e^{-2x} \sin 3x \cos 3x + 3e^{-2x} \sin^2 3x$$

$$= 3e^{-2x}(\cos^2 3x + \sin^2 3x) = 3e^{-2x} \neq 0. \text{ よって線形独立}$$

$$(2) W(\log x, x \log x) = \begin{vmatrix} \log x & x \log x \\ \frac{1}{x} & \log x + 1 \end{vmatrix} = \log x(\log x + 1) - x(\log x) \cdot \frac{1}{x} = (\log x)^2 + \log x - \log x$$

$$= (\log x)^2 \neq 0. \text{ よって線形独立}$$

$$128. (1) \text{特性方程式 } \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0, (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0. \therefore \lambda = -1, -2.$$

よって一般解は $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$. $y' = -C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-2x}$ より条件 $x = 0$ のとき $y = 0, y' = 1$ より

$$0 = C_1 + C_2, 1 = -C_1 - 2C_2. \text{ よって } C_1 = 1, C_2 = -1. \text{ よって求める解は } y = e^{-x} - e^{-2x}.$$

$$(2) \text{特性方程式 } \lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0, \lambda = 2 \pm \sqrt{2}.$$

よって一般解は $y = C_1 e^{(2+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(2-\sqrt{2})x}$. $y' = (2 + \sqrt{2})C_1 e^{(2+\sqrt{2})x} + (2 - \sqrt{2})C_2 e^{(2-\sqrt{2})x}$

$$\text{条件より } C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, C_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ よって求める解は } y = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{(2+\sqrt{2})x} - e^{(2-\sqrt{2})x}).$$

$$(3) \text{特性方程式 } \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0, \lambda = 1 \pm i. \text{ よって一般解は } y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

$$\text{条件より } C_1 = 1, C_2 = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} = e^{-\frac{\pi}{2}}. \text{ よって求める解は } y = e^x(\cos x + e^{-\frac{\pi}{2}} \sin x).$$

$$(4) \text{特性方程式 } \lambda^2 + 9 = 0, \lambda = \pm 3i. \text{ よって一般解は } y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x. y' = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x$$

$$\text{条件より } C_1 = 1, C_2 = \frac{1}{3}. \text{ よって求める解は } y = \cos 3x + \frac{1}{3} \sin 3x.$$

$$(5) \text{特性方程式 } 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0, \lambda = \frac{1}{2}. \text{ (2重解) よって一般解は } y = (C_1 + C_2 x)e^{\frac{x}{2}}. y' = C_2 e^{\frac{x}{2}} + (C_1 + C_2 x) \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$$

$$\text{条件より } C_1 = 1, C_2 = -\frac{1}{2}. \text{ よって求める解は } y = \left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{\frac{x}{2}}.$$

$$(6) \text{特性方程式 } \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0, \lambda = -1. \text{ (2重解) よって一般解は } y = (C_1 + C_2 x)e^{-x}.$$

$$\text{条件より } C_1 = 2e, C_2 = -e. \text{ よって求める解は } y = (2e - ex)e^{-x} = (2 - x)e^{1-x}.$$

$$129. (1) \text{特性方程式 } \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0, \lambda = 2. \text{ (2重解) よって } y'' - 4y' + 4y = 0 \text{ の一般解は } y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}.$$

$y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$ の 1 つの解を $y = Ae^{-x}$ と予想. $y' = -Ae^{-x}, y'' = Ae^{-x}$ を方程式に代入.

$$9Ae^{-x} = e^{-x} \text{ より } A = \frac{1}{9}. \text{ よって 1 つの解は } y = \frac{1}{9}e^{-x}. \text{ よって求める一般解は } y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \frac{1}{9}e^{-x}$$

$$(2) \text{特性方程式 } \lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0, \lambda = 2 \pm \sqrt{3}. \text{ よって } y'' - 4y' + y = 0 \text{ の一般解は } y = C_1 e^{(2+\sqrt{3})x} + C_2 e^{(2-\sqrt{3})x}.$$

$y'' - 4y' + y = 2x + 1$ の 1 つの解を $y = ax + b$ と予想. $y' = a, y'' = 0$ を方程式に代入.

$$ax + b - 4a = 2x + 1 \text{ より } a = 2, b = 9. \text{ よって 1 つの解は } y = 2x + 9.$$

$$\text{よって求める一般解は } y = C_1 e^{(2+\sqrt{3})x} + C_2 e^{(2-\sqrt{3})x} + 2x + 9$$

(3) 特性方程式 $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda = \pm i$. よって $y'' + y = 0$ の一般解は $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

$y'' + y = \cos 3x$ の 1 つの解を $y = A \cos 3x + B \sin 3x$ と予想.

$y' = -3A \sin 3x + 3B \cos 3x$, $y'' = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x$ を方程式に代入.

$-8A \cos 3x - 8B \sin 3x = \cos 3x$ より $A = -\frac{1}{8}$, $B = 0$. よって 1 つの解は $y = -\frac{1}{8} \cos 3x$.

よって求める一般解は $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{8} \cos 3x$

(4) 特性方程式 $\lambda^2 + 2 = 0$, $\lambda = \pm\sqrt{2}i$. よって $y'' + 2y = 0$ の一般解は $y = C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x$.

$y'' + 2y = \sin 2x$ の 1 つの解を $y = A \cos 2x + B \sin 2x$ と予想.

$y' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x$, $y'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x$ を方程式に代入.

$-2A \cos 2x - 2B \sin 2x = \sin 2x$ より $A = 0$, $B = -\frac{1}{2}$. よって 1 つの解は $y = -\frac{1}{2} \sin 2x$.

よって求める一般解は $y = C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x - \frac{1}{2} \sin 2x$

130. (1) 1 つの解を $y = ax^2 + bx + c$ と予想. $y' = 2ax + b$, $y'' = 2a$ を方程式に代入.

$4ax + 2a + 2b = 2x - 3$ より $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$. よって 1 つの解は $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$.

特性方程式 $\lambda^2 + 2\lambda = 0$, $\lambda = 0, -2$. よって $y'' + 2y' = 0$ の一般解は $y = C_1 + C_2 e^{-2x}$.

よって求める一般解は $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + C_1 + C_2 e^{-2x}$

(2) 1 つの解を $y = (ax + b)e^{2x}$ と予想. $y' = ae^{2x} + (ax + b)2e^{2x} = (2ax + a + 2b)e^{2x}$,

$y'' = 2ae^{2x} + (2ax + a + 2b)2e^{2x} = (4ax + 4a + 4b)e^{2x}$ を方程式に代入.

$(ax + 2a + b)e^{2x} = xe^{2x}$ より $a = 1$, $b = -2$. よって 1 つの解は $y = (x - 2)e^{2x}$.

特性方程式 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, $\lambda = 1$ (2重解). よって $y'' - 2y' + y = 0$ の一般解は $y = (C_1 + C_2x)e^x$.

よって求める一般解は $y = (x - 2)e^{2x} + (C_1 + C_2x)e^x$

(3) 1 つの解を $y = axe^x$ と予想. $y' = ae^x + axe^x = (ax + a)e^x$, $y'' = ae^x + (ax + a)e^x = (ax + 2a)e^x$

を方程式に代入. $2ae^x = e^x$ より $a = \frac{1}{2}$. よって 1 つの解は $y = \frac{1}{2}xe^x$.

特性方程式 $\lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda = \pm 1$. よって $y'' - y = 0$ の一般解は $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

よって求める一般解は $y = \frac{1}{2}xe^x + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

(4) 1 つの解を $y = (ax^2 + bx)e^x$ と予想. $y' = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx)e^x = \{ax^2 + (2a + b)x + b\}e^x$,

$y'' = (2ax + 2a + b)e^x + \{ax^2 + (2a + b)x + b\}e^x = \{ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b\}e^x$ を方程式に代入.

$(4ax + 2a + 2b)e^x = xe^x$ より $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{4}$. よって 1 つの解は $y = \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x$.

特性方程式 $\lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda = \pm 1$. よって $y'' - y = 0$ の一般解は $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

よって求める一般解は $y = \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$