3A 数学 AI レポート

補章　(続) 関数の展開　§ 1　(続) 関数の展開

p. 60

150. (2) $\dfrac{1}{n}=x$ とおくと $n=\dfrac{1}{x}$ また $n\to\infty$ のとき $x\to 0$.

　よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(e^{\frac{2}{n}}-e^{\frac{1}{n}})=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(e^{2x}-e^{x})=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{x}}{x}$. 以下ロピタルの定理.

151. (1) $a_n=(-1)^{n-1}\dfrac{n}{2n-1}$ よって $a_n$ は発散 (振動) よって級数も発散

152. (2) (1) の両辺を微分すると　左辺 $=-\dfrac{1}{2}+\cdots$.　右辺 $=\left(\dfrac{2}{x+2}\right)'=\cdots$. よって $\cdots=\cdots$.

　(3) (1) の両辺を 0 から $x$ まで積分する.

153. 誤差の限界 $|R_5|=\dfrac{\sin\theta}{120}<\dfrac{1}{120}=0.00833\cdots<0.0084$

154. (2) 誤差の限界 $|R_4|=\dfrac{e^{\theta}}{24}<\dfrac{e}{24}<\dfrac{3}{24}=0.125$(解答は $e<4$ として評価している)

　(3) 誤差の限界 $|R_4|=\dfrac{e^{\frac{1}{2}\theta}}{24}\cdot\dfrac{1}{2^4}$. ここで $e^{\frac{1}{2}\theta}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}<\sqrt{4}=2$.

　よって $|R_4|<\dfrac{2}{24}\cdot\dfrac{1}{2^4}<0.0052\cdots<0.006$

　(4) (3) より $e^{0.5}$ の近似値は 1.646. また誤差の限界から $1.646-0.006<e^{0.5}<1.646+0.006$.

　$(1.646)^2=2.709316$,

　$(1.646\pm 0.006)^2=(1.646)^2\pm 2\cdot(0.006)\cdot(1.646)+(0.006)^2=2.709316\pm 0.019752$

　($(0.006)^2$ は無視できる)

　よって $e$ の近似値は 2.709. また $2.689564<e<2.729068$. ゆえに $2.689<e<2.730$.

155〜159 解答参照. 159 の解答で $-1<x-1<0$ のときコーシーの剰余項を使うのは, ラグランジュの剰余項だと $-\theta<\theta(x-1)<0$ より $1-\theta<1+\theta(x-1)<1$ となり $\theta$ が 1 に近いと $1+\theta(x-1)$ が $1-\theta$ に, 従って 0 に近くて $|R_n|$ が収束しない可能性があるからです.

161. 解答では $n=5$ のときは $0.824\leqq\sin 1\leqq 0.842$ より $0.82, 0.83, 0.84$ の可能性がある.

　よって $n=6$ のときの近似値と誤差の限界を求めた.

162. 解答で

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)(1+x)^{-\frac{2n-1}{2}}=\frac{(-1)^{n-1}1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n}(1+x)^{-\frac{2n-1}{2}}$$

よって $R_n=\dfrac{(-1)^{n-1}1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n n!}(1+\theta x)^{-\frac{2n-1}{2}}x^n$

ここで $\left|\dfrac{(-1)^{n-1}1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n n!}\right|=\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots 2n}<1$. また $x>0$ のとき $(1+\theta x)^{-\frac{2n-1}{2}}<1$.

よって $|R_n|<x^n$ であり, $x=0.01$ のとき $|R_n|<0.001$ となるには $n\geqq 2$.