前期中間追試験用プリント解答 No. 1

1. (1) $\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$ (2) $e^{\frac{\pi}{4}}\{1+3(x-\dfrac{\pi}{4})\}$

2. (1) $2x-2x^2$ (2) $1+2x+2x^2$

3. (1) $\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}=1-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{32}x^2-\cdots-\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^{2n}n!}x^n-\cdots$

(2) $\log(1+3x)=3x-\dfrac{9}{2}x^2-\cdots+(-1)^n\dfrac{3^n}{n}x^n+\cdots$

注：(1) は難しいのでレポート課題からカットしてください

4. (1) $f(x)=e^x-\log(1+x)$ とおくと $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{1+x}, f''(x)=e^x+\dfrac{1}{(1+x)^2}$

よって $f'(0)=0, f''(0)=2>0$ よって $x=0$ で極小値を取る

(2) $f(x)=\sqrt{1-2x}+\sin x$ とおくと $f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}+\cos x, f''(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{(1-2x)^3}}-\sin x$

よって $f'(0)=0, f''(0)=-1<0$ よって $x=0$ で極大値を取る

5. (1) $-\dfrac{3}{4}$ (2) $\dfrac{3}{2}$ (3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (4) 2 (5) 1 $\left(\dfrac{1}{n}=x\text{ とせよ}\right)$ (6) 0

6. (1) 発散 $-\infty$ (2) 収束 2 (3) 発散 $-\infty$ (4) 収束 2 (5) 発散 (振動) (6) 発散 $-\infty$

7. (1) 収束, 和は $\dfrac{1}{3}$ (2) 発散 (∞ に発散)

8. (1) 収束, 和は $\dfrac{\pi-3}{4-\pi}$ (2) 発散

9. $\left(\dfrac{9}{10},\dfrac{3}{10}\right)$

10. (1) $\cos x(1+\sin^2 x)=1+\dfrac{1}{2}x^2+\cdots$ (2) $\log(1+x^2)=x^2+\cdots$

11. (1) $(-1+2i)e^{(2-4i)x}e^{(2i-3)x}$ (2) $\{1+(i+1)x\}e^xe^{-ix}$

12. (1) $2\pm i$ (2) $2,\pm i$

13. (1) ∞ (2) 1

14. (1) $a_n=\dfrac{n}{3n-2}, \lim_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{3}$ よって級数は発散

(2) $\left|\dfrac{\sin n}{n^2+n+1}\right|\leqq\dfrac{1}{n^2}$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束するので $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^2+n+1}\right|$ も収束,

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2+n+1}$ も収束

15. (1) $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$　公比 $-x$ の等比級数だから $|-x| < 1$ のとき,

よって $|x| < 1$ のときに限り収束. 従って, 収束半径は 1

(2) (1) で x を x^2 で置き換える $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$　収束半径は 1

(3) (2) の両辺を 0 から x まで積分する. $\mathrm{Tan}^{-1} x = x - \dfrac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{2n+1} x^{2n+1} + \cdots$

収束半径は 1.

16. (1) $e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{4!}x^4 + R_5, \quad R_5 = \dfrac{e^{\theta x}}{5!}x^5.$

(2) e の近似値は $2.70833\cdots$　誤差の限界は 0.025.