平成 25 年 11 月 2 日数検 2 級 2 次試験解答例

問題 1. (1) 条件より横の長さ $2x$. よって $x+2x+h=14$ だから $h=14-3x$. $h>0$ より $14-3x>0$. よって $x<\dfrac{14}{3}$.

$x>0$ より $0<x<\dfrac{14}{3}$. $S=2(x\cdot 2x+x\cdot h+2x\cdot h)=2\{2x^2+3x(14-3x)\}=-14x^2+84x$

(2) $S=-14(x^2-6x)=-14(x-3)^2+126$. $x=3$ のとき最大値 126. $x=0$ のとき $S=0$. $x=\dfrac{14}{3}$ のとき

$S=\dfrac{784}{9}$. よって $0<S\leqq 126$. 最小値なし. $x=3, h=5$ のとき最大値 126.

問題 2. $p=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_8\mathrm{C}_4}{{}_{10}\mathrm{C}_5}=\dfrac{2\cdot\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}}=\dfrac{2\cdot70}{252}=\dfrac{5}{9}, q=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_{12}\mathrm{C}_4}{{}_{15}\mathrm{C}_5}=\dfrac{3\cdot\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{\frac{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}}=\dfrac{3\cdot495}{3003}=\dfrac{45}{91}$,

$r=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_{12}\mathrm{C}_8}{{}_{15}\mathrm{C}_{10}}=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_{12}\mathrm{C}_4}{{}_{15}\mathrm{C}_5}=q=\dfrac{45}{91}$, $\;p>q=r$

問題 3. $X-Y=(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)-(2ab+2bc+2ca)=a^2+b^2+c^2\geqq 0$ よって $X\geqq Y$

$Z-X=(3a^2+3b^2+3c^2)-(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca$

$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqq 0$ よって $Z\geqq X$. 従って $Z\geqq X\geqq Y$

問題 4. (1) $|\vec{p}|^2=a^2+b^2+c^2$. $a=b-2c+1$ より $|\vec{p}|^2=(b-2c+1)^2+b^2+c^2=2b^2-4bc+5c^2+2b-4c+1$

$=2b^2+(-4c+2)b+5c^2-4c+1=2\{b^2+(-2c+1)b\}+5c^2-4c+1$

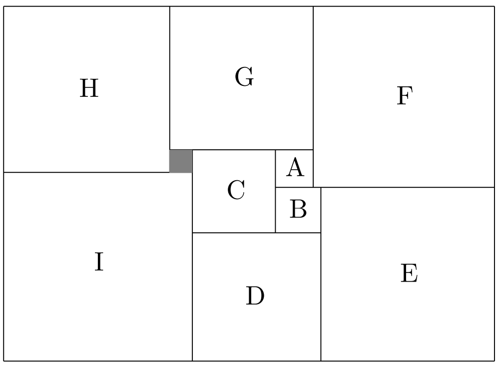
$=2\left\{\left(b-c+\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(-c+\dfrac{1}{2}\right)^2\right\}+5c^2-4c+1=2\left(b-c+\dfrac{1}{2}\right)^2+3c^2-2c+\dfrac{1}{2}$

$=2\left(b-c+\dfrac{1}{2}\right)^2+3\left(c-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{1}{6}$. $|\vec{p}|^2$ の最小値は $\dfrac{1}{6}$ よって $|\vec{p}|$ の最小値は $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

(2) $|\vec{p}|$ が最小となるのは $c=\dfrac{1}{3}, b=c-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{6}$ のときで, このとき $a=b-2c+1=-\dfrac{1}{6}-\dfrac{2}{3}+1=\dfrac{1}{6}$

$\vec{p}=\left(\dfrac{1}{6},-\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{3}\right)$

問題 5. 図のように, もっとも小さい正方形以外の正方形を A, B, $\cdots$, I とし, 1 辺の長さをそれぞれ $a,b,\cdots,i$ とすると




$c=a+b\cdots$①, $d=c+b=a+2b\cdots$②, $e=d+b=a+3b\cdots$③,

$a+f=b+e=a+4b$ より $f=4b\cdots$④, $a+g=f=4b$ より

$g=4b-a\cdots$⑤, $h=g+3=4b-a+3\cdots$⑥,

$i=h+3=4b-a+6\cdots$⑦, $g=3+c+a$ に⑤, ①を代入して

$4b-a=3+2a+b$ よって $b=a+1\cdots$⑧

$i+3=c+d$ に⑦, ①, ②を代入して $4b-a+9=2a+3b$

$b+9=3a$. これに⑧を代入して $a+10=3a$. よって $\underline{a=5}$. ⑧より $\underline{b=6}$. ①より $\underline{c=11}$. ②より $\underline{d=17}$

③より $\underline{e=23}$. ④より $\underline{f=24}$. ⑤より $\underline{g=19}$. ⑥より $\underline{h=22}$. ⑦より $\underline{i=25}$

答 $5,6,11,17,19,22,23,24,25$

問題 6. $(a\sin B-b\sin C)(b\sin C-c\sin A)(c\sin A-a\sin B)=0$ より $a\sin B=b\sin C$ または $b\sin C=c\sin A$ または

$c\sin A=a\sin B$. $\quad a\sin B=b\sin C$ のとき $\dfrac{a}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$. 正弦定理より $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$ だから $a=c$ よって

$a=c$ の二等辺三角形. $b\sin C = c\sin A$ のとき $\dfrac{b}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$. 正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$ だから $a=b$

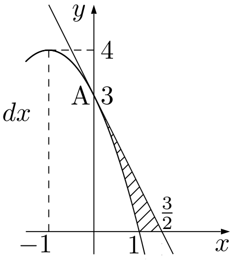
よって $a=b$ の二等辺三角形. $c\sin A = a\sin B$ のとき $\dfrac{c}{\sin B}=\dfrac{a}{\sin A}$. 正弦定理より $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{a}{\sin A}$ だから

$b=c$ よって $b=c$ の二等辺三角形

問題 7. (1) A の座標は $x=0$ より $y=3$. よって A$(0,3)$. $(-x^2-2x+3)'=-2x-2$ より接線の傾きは $-2$.

よって接線の方程式は $y-3=-2(x-0)$. $y=-2x+3$

(2) 放物線と接線 $\ell$ と $x$ 軸で囲まれた図形は右図の斜線部分で, 面積 $S$ は




$$S=\int_0^1\{(-2x+3)-(-x^2-2x+3)dx+\int_1^{\frac{3}{2}}(-2x+3)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^{\frac{3}{2}}(-2x+3)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+[-x^2+3x]_1^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}+\frac{9}{4}-2=\frac{7}{12}$$