平成 25 年 11 月 2 日数検準 1 級 1 次試験解答例

問題 1. 底変換公式より $t=\dfrac{\log_2 8}{\log_2 6}=\dfrac{3}{1+\log_2 3}$. よって $1+\log_2 3=\dfrac{3}{t}$, $\log_2 3=\dfrac{3}{t}-1$ だから

$\log_9 6=\dfrac{\log_2 6}{\log_2 9}=\dfrac{1+\log_2 3}{2\log_2 3}=\dfrac{1+\frac{3}{t}-1}{2(\frac{3}{t}-1)}=\dfrac{3}{2(3-t)}$

問題 2. 接点の座標を (a,b) とおくと接線の方程式は $ax+by=5$. $(-7,1)$ を通るから $-7a+b=5\cdots$①.

(a,b) は円周上の点だから $a^2+b^2=5\cdots$②. ①より $b=7a+5$. ②に代入 $a^2+(7a+5)^2=5$. $50a^2+70a+20=0$.

$10(5a+2)(a+1)=0$. $a=-\dfrac{2}{5},-1$. Q の x 座標は大きい方だから $-\dfrac{2}{5}$

問題 3. $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,2,-3),\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(3,-1,2)$. よって $\angle$AOB$=\theta$ とすると $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$

$=\dfrac{1\cdot 3+2\cdot(-1)+(-3)\cdot 2}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}}=-\dfrac{5}{14}$. $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{25}{196}}=\dfrac{\sqrt{171}}{14}$

$\triangle$OAB の面積は $\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\theta=\dfrac{1}{2}\sqrt{14}^2\dfrac{\sqrt{171}}{14}=\dfrac{\sqrt{171}}{2}$

問題 4. ①$2A+3B=\begin{pmatrix}2&4\\6&10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&3\\-9&-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&7\\-3&-2\end{pmatrix}$

② $A^{-1}=\dfrac{1}{5-6}\begin{pmatrix}5&-2\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&2\\3&-1\end{pmatrix}, B^{-1}=\dfrac{1}{-4-(-3)}\begin{pmatrix}-4&-1\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1\\-3&-1\end{pmatrix}$.

$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}=\begin{pmatrix}4&1\\-3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&2\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-17&7\\12&-5\end{pmatrix}$

問題 5. ① $x+1=t$ とおくと $dx=dt$ よって $\displaystyle\int\frac{x}{(x+1)^2}dx=\int\frac{t-1}{t^2}dt=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)dt=\log t+\frac{1}{t}+C$

$=\log(x+1)+\dfrac{1}{x+1}+C$

② $\displaystyle\int_0^{e-1}\frac{x}{(x+1)^2}dx=\left[\log(x+1)+\frac{1}{x+1}\right]_0^{e-1}=\log e+\frac{1}{e}-\log 1-1=\frac{1}{e}$

問題 6. 軸は $y=2$, 頂点は $(1,2)$ となり, $y^2=4x$ を x 軸方向に 1, y 軸方向に 2 平行移動したグラフだから $(y-2)^2=4(x-1)$

問題 7. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{4n^2+5n})=\lim_{n\to\infty}\frac{4(n^2+3n)-(4n^2+5n)}{2\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{4n^2+5n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{7n}{2\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{4n^2+5n}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{7}{2\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{4+\frac{5}{n}}}=\frac{7}{4}$