平成 25 年 11 月 2 日数検準 1 級 2 次試験解答例

問題 1. $A \geqq B \geqq C$ とする. $X-Y=\sin A-\cos A+\sin B-\cos B+\sin C-\cos C$

ここで三角関数の合成より $\sin A-\cos A=\sqrt{2}\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)$. 他も同様だから

$A_1=A-\frac{\pi}{4}, B_1=B-\frac{\pi}{4}, C_1=C-\frac{\pi}{4}$ とおくと

$X-Y=\sqrt{2}\left\{\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=\sqrt{2}(\sin A_1+\sin B_1+\sin C_1)$

(i) $C>\frac{\pi}{4}$ のとき A,B,C は鋭角だから $0<C_1 \leqq B_1 \leqq A_1<\frac{\pi}{4}$.

よって $\sin A_1 \geqq \sin B_1 \geqq \sin C_1>0$ より $X-Y>0$. $X>Y$

(ii) $C \leqq \frac{\pi}{4}$ のとき $C_1 \leqq 0$. $|C_1|=\theta$ とおくと $\theta=-C_1$ で $\theta \geqq 0$.

$A_1+B_1+C_1=A+B+C-\frac{3}{4}\pi=\pi-\frac{3}{4}\pi=\frac{\pi}{4}$. A が鋭角 より $A_1<\frac{\pi}{4}$ だから $B_1+C_1>0$. よって

$B_1>-C_1=\theta \geqq 0$. 従って $0 \leqq \theta<B_1 \leqq A_1<\frac{\pi}{4}$ だから $0 \leqq \sin\theta<\sin B_1 \leqq \sin A_1$. よって

$X-Y=\sqrt{2}\{\sin A_1+\sin B_1+\sin(-\theta)\}=\sqrt{2}(\sin A_1+\sin B_1-\sin\theta)>0$. $X>Y$.

(i), (ii) より $A \geqq B \geqq C$ ならば $X>Y$. 他の場合も同様に $X>Y$.

問題 2. (1) $n=2m$ とすると $S_n=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(2m-1)^2-(2m)^2=1^2+3^2+\cdots+(2m-1)^2-\{2^2+4^2+\cdots+(2m)^2\}$

$=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)^2-\sum_{k=1}^{m}(2k)^2=\sum_{k=1}^{m}(-4k+1)=-2m(m+1)+m=-2m^2-m$

$m=\frac{n}{2}$ より $S_n=-2\left(\frac{n}{2}\right)^2-\frac{n}{2}=-\frac{n(n+1)}{2}$

(2) n が奇数のとき $n=2m+1$ とおくと $S_n=S_{2m}+(2m+1)^2=-2m^2-m+4m^2+4m+1=2m^2+3m+1$

$=(2m+1)(m+1)$. $2m+1=n, m+1=\frac{n+1}{2}$ だから $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$. よって (1) と合わせて

$S_n=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$

問題 3. $\angle\mathrm{POA}=\frac{\theta}{4}$ だから $\triangle\mathrm{POA}=\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{4}=\triangle\mathrm{QOP}=\triangle\mathrm{ROQ}=\triangle\mathrm{BOR}$. $\triangle\mathrm{AOB}=\frac{1}{2}\sin\theta$ より

$S(\theta)=$ 六角形 OAPQRB - $\triangle\mathrm{OAB}=4\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{4}-\frac{1}{2}\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{4}-\frac{1}{2}\sin\theta$ よって

$\lim_{\theta\to 0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to 0}\frac{2\sin\frac{\theta}{4}-\frac{1}{2}\sin\theta}{\theta^3}$. ロピタルの定理より $\lim_{\theta\to 0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{4}-\frac{1}{2}\cos\theta}{3\theta^2}=\lim_{\theta\to 0}\frac{-\frac{1}{8}\sin\frac{\theta}{4}+\frac{1}{2}\sin\theta}{6\theta}$

$=\lim_{\theta\to 0}\frac{-\frac{1}{32}\cos\frac{\theta}{4}+\frac{1}{2}\cos\theta}{6}=\frac{-\frac{1}{32}+\frac{1}{2}}{6}=\frac{5}{64}$

問題 4. (1) $|AB|=xw-yz, |A|=ad-bc, |B|=ps-qr$. よって $xw-yz-(ad-bc)(ps-qr)=|AB|-|A||B|=0$.

(2) AB が逆行列をもてば $|AB| \neq 0$. よって $|A||B| \neq 0$. よって $|A| \neq 0$ かつ $|B| \neq 0$. 従って A も B も逆行列をもつ.

問題 5. (1) 5 人を A,B,C,D,E とし A と B, B と C, C と D, D と E, E と A は互いに知り合いでそれ以外は互いに知り合いでない場合は「互いに知り合いの 3 人組」も「互いをまったく知らない 3 人組」も存在しない.

(2) $n \geqq 6$ として n 人のうちの 1 人を A とする. A 以外の人のうちで A と互いに知り合いである人を $B_1, B_2, \cdots, B_k$,

A と互いに知り合いでない人を $C_1, C_2, \cdots, C_l$, $1+k+l=n$ とする.

$k+l=n-1 \geqq 5$. よって $k \geqq 3$ または $l \geqq 3$.

(ii) $k \geqq 3$ のとき A, B_1, B_2 について A と B_1, A と B_2 はそれぞれ互いに知り合いだから B_1 と B_2 が互いに知り合いならば A, B_1, B_2 は 3 人とも互いに知り合いで証明終了.

よって B_1 と B_2 が互いに知り合いでない場合を考えればよい.

同様にして A, B_2, B_3 についても B_2 と B_3 が互いに知り合いでない場合を考えればよい.

同様にして A, B_1, B_3 についても B_1 と B_3 が互いに知り合いでない場合を考えればよい.

このとき B_1, B_2, B_3 は互いに知り合いではない. よって証明終了

(ii) $l \geqq 3$ のとき A, C_1, C_2 について A と C_1, A と C_2 はそれぞれ互いに知り合いでないから C_1 と C_2 が互いに知り合いでないならば A, C_1, C_2 は 3 人とも互いに知り合いでないので証明終了.

よって C_1 と C_2 が互いに知り合いの場合を考えればよい.

同様にして A, C_2, C_3 についても C_2 と C_3 が互いに知り合いの場合を考えればよい.

同様にして A, C_1, C_3 についても C_1 と C_3 が互いに知り合いの場合を考えればよい.

このとき C_1, C_2, C_3 は互いに知り合い. よって証明終了

(i), (ii) より証明終了

問題 6. $A = x+y+z$ とおくと $xy+yz+zx=3$ より $A^2-9=(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)$

$=(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)-3(xy+yz+zx)=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$

$2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+z^2-2zx+x^2=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geqq 0$

よって $A^2-9 \geqq 0$. $(A+3)(A-3) \geqq 0$. 従って $A \leqq -3$ または $A \geqq 3$. よって

$x+y+z \leqq -3$ または $x+y+z \geqq 3$

問題 7. (1) $g(x)=x\displaystyle\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$. よって $g'(x)=(x)'\displaystyle\int_0^x f(t)dt+x\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt-\frac{d}{dx}\int_0^x tf(t)dt$

$=\displaystyle\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(t)dt$. よって $g''(x)=\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt=f(x)$

(2) $x-t=u$ とおくと $t=x-u$, $dt=-du$, $t:0\to x$ のとき $u:x\to 0$ よって

$h(x)=\displaystyle\int_x^0 (x-u)^2 f(u)(-du)=\int_0^x (x-u)^2 f(u)du=x^2\int_0^x f(u)du-2x\int_0^x uf(u)du+\int_0^x u^2 f(u)du$

$h'(x)=2x\displaystyle\int_0^x f(u)du+x^2\frac{d}{dx}\int_0^x f(u)du-2\int_0^x uf(u)du-2x\frac{d}{dx}\int_0^x uf(u)du+\frac{d}{dx}\int_0^x u^2 f(u)du$

$=2x\displaystyle\int_0^x f(u)du+x^2f(x)-2\int_0^x uf(u)du-2x^2f(x)+x^2f(x)=2x\int_0^x f(u)du-2\int_0^x uf(u)du=2g(x)$

よって (1) より $h'''(x)=2g''(x)=2f(x)$