平成 26 年 6 月 21 日実施 第 252 回数検 2 級 2 次試験解答例

問題 1. (1) △ABC と △RQC は相似で PB=RQ= x だから x :QC= $12:16$. よって QC= $\frac{4}{3}x$,　BQ= $16-\frac{4}{3}x$

$S=x\left(16-\frac{4}{3}x\right)=16x-\frac{4}{3}x^2$

(2) $S=-\frac{4}{3}(x-6)^2+48$.　最大値 48 $(x=6)$

(3) 三角形の土地の面積は $16\times 12\div 2=96$. よって割合の最大値は $\frac{48}{96}=\frac{1}{2}$

問題 2. (1) $(x,y)=(2,-1)$.　$(15,-8),(-11,6)$ でもよい.

(2) $7x+13y=1\cdots(*)$　(1) より $7\cdot 2+13\cdot(-1)=1$. この式を $(*)$ から引くと $7x-7\cdot 2+13y-13\cdot(-1)=0$

$7(x-2)+13(y+1)=0$ よって $7(x-2)=-13(y+1)$. この左辺は 7 の倍数. 右辺は 13 の倍数だから

$7\cdot 13$ の倍数. よって $7(x-2)=-13(y+1)=7\cdot 13t$　(t は整数). $7(x-2)=7\cdot 13t$ より $x=2+13t$

$-13(y+1)=7\cdot 13t$ より $y=-1-7t$.　　$x=2+13t, y=-1-7t$　(t は整数)

問題 3. $2^{\frac{x}{10}}\geqq 100000=10^5$. よって $\log_{10}2^{\frac{x}{10}}=\log_{10}10^5$.　$\frac{x}{10}\log_{10}2=5\log_{10}10=5$

$x=\frac{50}{\log_{10}2}=\frac{50}{0.3010}=166.1\cdots$. よって 167 分

問題 4. (1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{2}{5}\vec{b}$,　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{4}{5}\vec{c}$

(2) R は線分 BQ 上にあるから $\overrightarrow{\mathrm{BR}}=s\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=s(\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})$. (1) より $\overrightarrow{\mathrm{BR}}=s\left(\frac{4}{5}\vec{c}-\vec{b}\right)$. よって

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BR}}=\vec{b}+s\left(\frac{4}{5}\vec{c}-\vec{b}\right)=(1-s)\vec{b}+\frac{4s}{5}\vec{c}$

R は線分 CP 上にあるから $\overrightarrow{\mathrm{CR}}=t\overrightarrow{\mathrm{CP}}=t(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})$. (1) より $\overrightarrow{\mathrm{CR}}=s\left(\frac{2}{5}\vec{b}-\vec{c}\right)$. よって

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CR}}=\vec{c}+t\left(\frac{2}{5}\vec{b}-\vec{c}\right)=\frac{2t}{5}\vec{b}+(1-t)\vec{c}$ よって

$\begin{cases}1-s=\frac{2t}{5}\\ \frac{4s}{5}=1-t\end{cases}$　これを解いて $s=\frac{15}{17}, t=\frac{5}{17}$,　$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{2}{17}\vec{b}+\frac{12}{17}\vec{c}$

問題 5. 等式より D ÷ E は整数. よって ① E = 1 または ② E = 2, D = 4

①のとき A + B × C − D = 6.

B,C 共に奇数のとき A,D は共に偶数で B × C は奇数だから A + B × C − D は奇数で 6 ではない

B,C が奇数偶数 1 つづつのとき A,D も奇数偶数 1 個づつで B × C は偶数だから A + B × C − D は奇数で 6 ではない

よって B,C は共に偶数で (A,B,C,D) = $(3,2,4,5),(3,4,2,5)$

②のとき A + B × C −2 = 6. (A,B,C) = $(3,1,5),(3,5,1),(5,1,3),(5,3,1)$

よって答 (A,B,C,D,E) = $(3,2,4,5,1),(3,4,2,5,1),(3,1,5,4,2),(3,5,1,4,2),(5,1,3,4,2),(5,3,1,4,2)$

問題 6. 証明 余弦定理より $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ だから左辺 $=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc\sin B\sin C}$

面積の公式より $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ca\sin B$ だから右辺 $=\frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{8\cdot\frac{1}{2}ab\sin C\cdot\frac{1}{2}ca\sin B}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc\sin B\sin C}$

よって左辺 = 右辺　(証明終り)

問題 7. (1) $y' = 2x - 2 = 2$. よって $x = 2$. このとき $y = 2$ だから求める接線の方程式は $y - 2 = 2(x - 2)$. よって

$y = 2x - 2$

(2) $S = \displaystyle\int_0^2 \{x^2 - 2x + 2 - (2x - 2)\}dx = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x\right]_0^2 = \frac{8}{3}$