

数学アラカルト

第1回 連分数と1次不定方程式

§1 割算の答から数を当てる

2桁の整数を勝手に2つ選んでください。それを a, b とします。電卓を使って、 $a \div b$ を計算し、その答を知らせてくれれば、2つの数 a, b を当てることができます。

では、試してみましょう。(2, 3 試行する)

どうやって2つの数 a, b を当てることができるのか、その種明かしをします。

例えば、 $a=19, b=41$ のとき、 $\frac{19}{41}=0.4634146\dots$ となりますから、

$x=0.4634146$ が知らされたとします。 $x \doteq \frac{19}{41}$ であり、 $0 < x < 1$ より $\frac{1}{x} > 1$ です。

$$\frac{1}{x} = 2.1578948 = \text{整数部分} + \text{小数部分} = c_1 + x_1 \text{ とおくと、 } c_1 = 2, x_1 = 0.1578948$$

ここで、 $\frac{1}{x} \doteq \frac{41}{19} = 2 + \frac{3}{19}$ より $x_1 \doteq \frac{3}{19}$ です。同じ操作を繰り返します。

$$\frac{1}{x_1} = 6.3333308 = \text{整数部分} + \text{小数部分} = c_2 + x_2 \text{ とおくと } c_2 = 6, x_2 = 0.3333308$$

そして、 $\frac{1}{x_1} \doteq \frac{19}{3} = 6 + \frac{1}{3}$ より $x_2 \doteq \frac{1}{3}$ です。

$$\frac{1}{x_2} = 3.0000228 = \text{整数部分} + \text{小数部分} = c_3 + x_3 \text{ とおくと } c_3 = 3, x_3 = 0.0000228$$

$\frac{1}{x_2} \doteq 3$ だから $x_3 (> 0) \doteq 0$ であり、 $\frac{1}{x_3} = 43859.649$ は大きな数になるので、ここで計算をやめます。

以上のことを続けて書くと次のようになります。

$$x = \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{c_1 + x_1} = \frac{1}{c_1 + \frac{1}{\frac{1}{c_1 + \frac{1}{x_1}}}} = \frac{1}{c_1 + \frac{1}{c_2 + x_2}} = \frac{1}{c_1 + \frac{1}{c_2 + \frac{1}{\frac{1}{c_2 + \frac{1}{x_2}}}}} = \frac{1}{c_1 + \frac{1}{c_2 + \frac{1}{c_3 + x_3}}} \doteq \frac{1}{c_1 + \frac{1}{c_2 + \frac{1}{c_3}}}$$

この最後の分数(連分数といいます)を普通の分数になおせば、 a, b の値が求まります。

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{3}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{19}} = \frac{19}{41} \text{ ですから、 } a = 19, b = 41 \text{ です。}$$

例題 1. 2桁の数 \div 2桁の数 を電卓で計算したところ、1.3283582 になりました。2桁の数は何でしょうか。

解答 $x = 1.3283582 = 1 + x_1$ とおく。 $c_1 = 1, x_1 \doteq 0.328352$ 。

$$c_2 + x_2 = \frac{1}{x_1} = 3.0454546 = 3 + 0.0454546 \text{ より } c_2 = 3, x_2 \doteq 0.0454546$$

$$c_3 + x_3 = \frac{1}{x_2} = 21.999973 = 21 + 0.999973 \text{ より } c_3 = 21, x_3 \doteq 0.999973$$

$$c_4 + x_4 = \frac{1}{x_3} = 1.000027 = 1 + 0.000027 \text{ より } c_4 = 1, x_4 \doteq 0.000027$$

$\frac{1}{x_4} = 37037.037$ は大きな数であるから (x_4 は小さな数であるから)、ここで打ち切る。

よって、

$$2 \text{桁の数} \div 2 \text{桁の数} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{21 + \frac{1}{1}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{22}} = 1 + \frac{22}{67} = \frac{89}{67}$$

問題1. 2桁の数÷2桁の数を電卓で計算したら、次のような値になりました。2桁の数はそれぞれいくつといくつでしょう。

- (1) 3.2380952 (2) 2.3235294 (3) 0.45714286 (4) 0.46753247

§2 互除法と連分数

2つの正の整数 a, b ($a > b$) が与えられたとき、 $a = b_0$, $b = b_1$ とおき、 $b_0 \div b_1$ を整数部分と小数部分の和に直します。

$$\frac{a}{b} = \frac{b_0}{b_1} = \text{整数部分} + \text{小数部分} = c_1 + \frac{b_2}{b_1} \quad \text{このとき、} \quad b_0 = b_1 c_1 + b_2 \quad (0 \leq b_2 < b_1)$$

同様に $b_1 \div b_2$ を変形します。

$$\frac{b_1}{b_2} = \text{整数部分} + \text{小数部分} = c_2 + \frac{b_3}{b_2} \quad \text{ここで、} \quad b_1 = b_2 c_2 + b_3 \quad (0 \leq b_3 < b_2)$$

新しくできる分数の分母はどんどんと小さくなりますから、この操作を続けていくといつかは

$$\frac{b_{k-1}}{b_k} = \text{整数} = c_k, \quad b_{k-1} = b_k c_k$$

となります。このような計算を（ユークリッドの）**互除法**といいます。

このとき、 b_k は a, b の最大公約数（greatest common divisor ; gcd）になります。 $b_k = \text{gcd}(a, b)$

また、以上の計算により、 $\frac{a}{b} = \frac{b_0}{b_1}$ の連分数表示が得られます。

$$\frac{a}{b} = \frac{b_0}{b_1} = c_1 + \frac{b_2}{b_1} = c_1 + \frac{1}{\frac{b_1}{b_2}} = c_1 + \frac{1}{c_2 + \frac{b_3}{b_2}} = \dots = c_1 + \frac{1}{c_2 + \frac{1}{c_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{c_k}}}}$$

例題 2. 559 と 234 の最大公約数 : $\text{gcd}(559, 234)$ を求めよ。また、 $\frac{559}{234}$ を連分数で表せ。

解答

	559	234	2
	468	182	
2	91	52	1
	52	39	
1	39	13	3
	39		
	0		

例題 4. 1次不定方程式 $43x - 30y = 1$ の整数解を1つ求めよ。

$$\text{解答} \quad \frac{43}{30} = 1 + \frac{13}{30} = 1 + \frac{1}{\frac{30}{13}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{4}{13}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{13}{4}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}$$

であるから、 $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = 1 + \frac{3}{6+1} = 1 + \frac{3}{7} = \frac{10}{7}$ より $x_1 = 7, y_1 = 10$

検算 $43x_1 - 30y_1 = 301 - 300 = 1$

問題4. 次の1次不定方程式の整数解を1つ求めよ.

(1) $47x - 10y = 1$ (2) $45x - 14y = 1$ (3) $38x - 29y = 1$ (4) $43x - 19y = 1$

例題 5. $7x - 5y = 1$ の整数解を1つ求めよ。

$$\text{解答} \quad \frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} \quad \text{であるから、} \quad 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{より} \quad x_1 = 2, y_1 = 3$$

検算 $7x_1 - 5y_1 = 14 - 15 = -1$ であるから、 $-x_1 = -2, -y_1 = -3$ が解になる。

例題 6. $7x - 5y = 1$ の整数解の一般解を求めよ。

解答 例題 4. より、 $x_1 = 2, y_1 = 3$ のとき、 $7x_1 - 5y_1 = -1$

この式と問題の式 $7x - 5y = 1$ との和をとると、 $7(x + x_1) - 5(y + y_1) = 0, 7(x + x_1) = 5(y + y_1)$

これより、 $x + x_1 = 5t, y + y_1 = 7t$ とおける。よって $x = 5t - x_1 = 5t - 2, y = 7t - y_1 = 7t - 3$

である。ここで、 t は任意の整数である (一般解)。特に、 $t = 1$ とすれば、最小の正整数解 $x = 3, y = 4$ を得る。

例題 7. $41x - 19y = 1$ の整数解の一般解を求めよ。また、最小の正整数解を求めよ。

$$\text{解答} \quad \frac{41}{19} = 2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{3}} \quad \text{であるから、} \quad 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6} \quad \text{より} \quad x_1 = 6, y_1 = 13 \quad \text{このとき、}$$

$41x_1 - 19y_1 = 246 - 247 = -1$ であるから、問題の式 $41x - 19y = 1$ との和をとると、

$41(x + 6) - 19(y + 13) = 0, 41(x + 6) = 19(y + 13)$ これより、 $x + 6 = 19t, y + 13 = 41t$ とおける。

よって $x = 19t - 6, y = 41t - 13$ である。ここで、 t は任意の整数である (一般解)。

特に、 $t = 1$ とすれば、最小の正整数解 $x = 13, y = 28$ を得る。

問題5. 次の1次不定方程式の一般解を求めよ. また, 最小の正整数解を求めよ.

(1) $35x - 16y = 1$ (2) $38x - 11y = 1$ (3) $91x - 22y = 1$ (4) $139x - 97y = 1$

最後に、1次不定方程式に関する一般的な結果をのせておこう。

定理 a, b は正の整数 ($a > b > 0$) とし、 a, b の最大公約数 $\gcd(a, b)$ を d とする。
1次不定方程式 $ax - by = d$ は常に解をもつ。

定理 a, b, c は正の整数とし、 $\gcd(a, b) = d, a = a_1d, b = b_1d, \gcd(a_1, b_1) = 1$ とする。
 $ax - by = c$ が解をもつための必要十分条件は $c = kd$ (k は整数) であり、その一般解は
$$x = x_1 + b_1t, y = y_1 + a_1t \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

で与えられる。ここで x_1, y_1 は、1次不定方程式 $a_1x - b_1y = k$ の1組の解である。

第1回 レポート問題

- 2桁の分数(2桁の数 \div 2桁の数)を電卓で計算したところ、1.3191489 になりました。元の2桁の分数は何でしょうか。
- $71x - 29y = 1$ の整数解をすべて求めよ。また、最小の正整数解を求めよ。