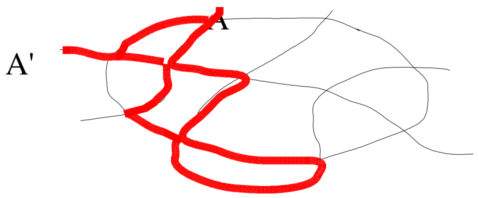
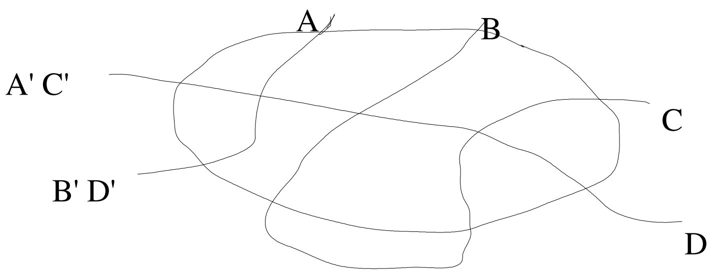
第４回 数学アラカルト
グラフ理論３題
曲線阿弥陀

この曲線阿弥陀のアイデアは 根上生也著 グラフ理論３段階 による

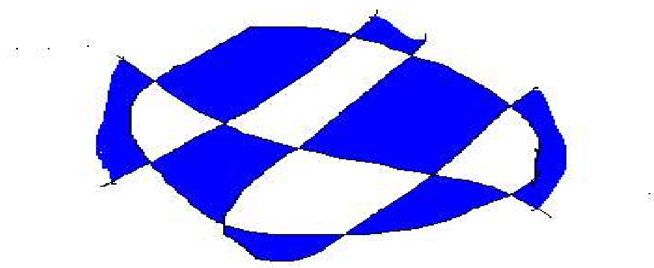
阿弥陀籤は良く知っているだろう。ここでは曲線を使って阿弥陀籤を作ってみよう。
曲線にするとき問題となるのは線が十字に交叉していることである。これは右折、左折を交互に行なうこととして定義する。



図のようにＡから入って交互に折れ曲がりＡ'から出て行くこととなる。



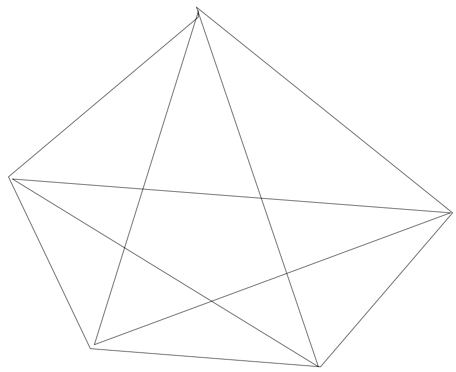
全ての点について同様にするとこの様になる。
このことから何が予想できるであろうか。
予想： 入った点から必ず奇数番目に出て来て、偶数番目に出て来ることはない。
このことを証明しよう。



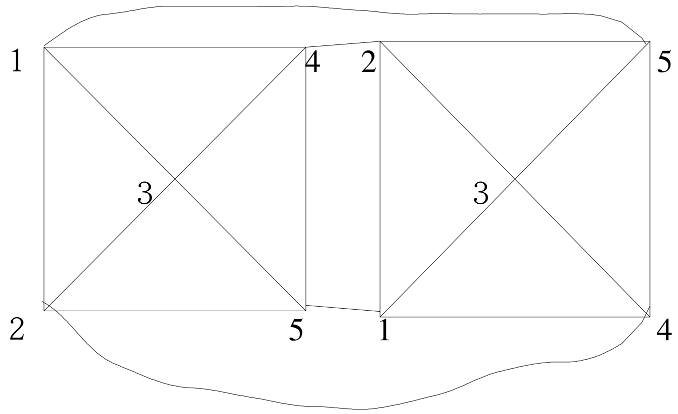
図のように市松模様を描く。Aから入って阿弥陀籤にしたっがてたどる道は常に青い部分を右側に進んでいることが解る。
出て来るときも同様だから、青い部分を右側にして出てくる。このような点は奇数番目はなれたところしかない。偶数番目からは青い部分を左側にしてでてくることとなる。

グラフの平面化
この内容は根上生也著 グラフ理論３段階 による

グラフには平面にどうしても描けないものがある。たとえば５個の点を全て繋いだ完全グラフ K5 などである。



しかし点の個数を２倍にして、そのうちの２個を同じ点だとみなしたとき、同じ繋がり方をするグラフを作ることができる

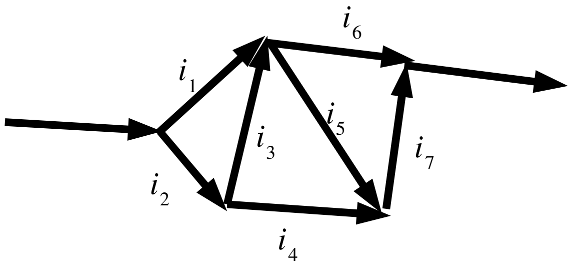


図のようして同じ数字の点は同じものとみなすと、K5 と同じ繋がり方をしている。
この様にすることをグラフの平面化ということにしよう。
グラフの平面化は 2 倍化してできるものと、どうやってもできないもの(無限個の点を使えばできるが)が存在して、点を 3 倍や 4 倍にして平面化できるものはない。

電気回路の基板は平面であるので、部品が 2 倍必要になるが、平面上に実現できない回路が 2 倍にして平面化することにより同等の回路が実現できることもありうる。

グラフと電気抵抗

グラフの辺上に１Ωの抵抗があると考え、グラフのうちの2点に電源を繋ぎ、全体での電気抵抗を考えてみよう。
たいていの場合、n本の抵抗を使った回路の抵抗がxΩだったとすると、おなじn本の抵抗を使って1/xΩの抵抗となる回路を作ることができる。
たとえば、並列になっているものを直列にすると電気抵抗は逆数になることがわかる。
もっと複雑な回路のときでも平面上に描けるグラフでは双対グラフを使って作ることができる。



各点への電流の流入、流出より次の方程式ができる

$$i_1+i_2=i_6+i_7$$
$$i_1+i_3=i_6+i_5$$
$$i_2=i_3+i_4$$
$$i_4+i_5=i_7$$

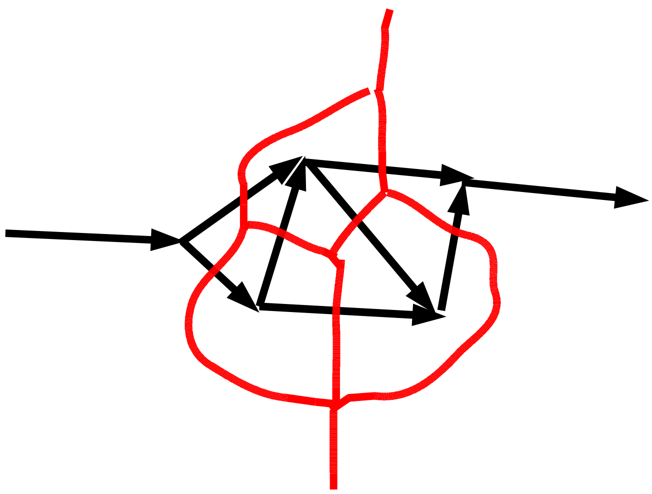
また、各面の廻りを一周する回路における電圧降下の式から

$$i_2+i_3-i_1=0$$
$$i_3+i_5-i_4=0$$
$$i_5+i_7-i_6=0$$

という式ができる。

この連立方程式を $i_1+i_2=1$ として解くと、 $i_1=\frac{4}{7}, i_2=\frac{3}{7}, i_3=\frac{1}{7}, i_4=\frac{2}{7}, i_5=\frac{1}{7}, i_6=\frac{4}{7}, i_7=\frac{3}{7}$

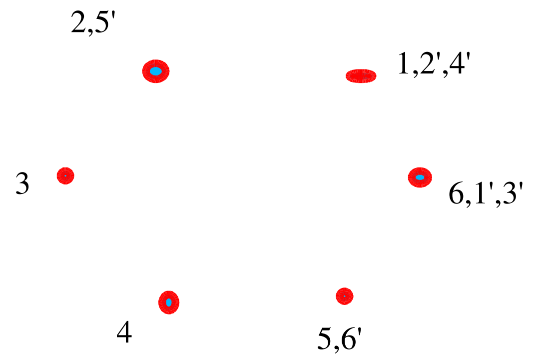
となる。

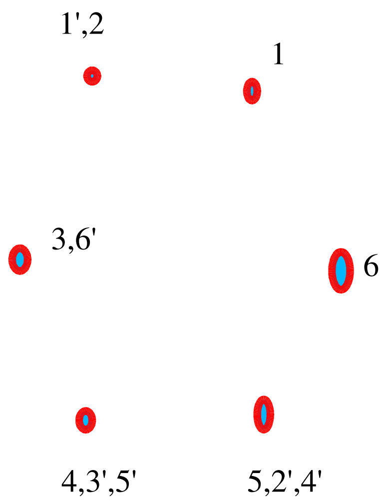


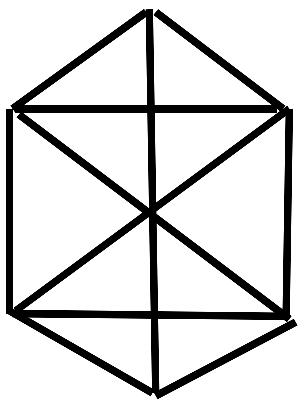
図のように双対グラフを作る。対応する辺(互いに交わる辺)の電流を同じ記号で表わすことにすると
各点の電流の流入、流出からは

$$i_1+i_6=i_2+i_4+i_7$$
$$i_6=i_5+i_7$$
$$i_1=i_3+i_2$$
$$i_3+i_5=i_4$$
という式が出て来る。
また各面での電圧降下の式からは
$$i_1+i_3-i_5-i_6=0$$
$$i_2-i_4-i_3=0$$
$$i_5+i_4-i_7=0$$
という式がでてくる。この式と元のグラフの式をくらべてみると、電流の式と電圧の式が入れ換わっていることが解る。
電圧と電流が入れ換われば、電気抵抗は逆数になるから、双対グラフの電気抵抗は元のグラフの電気抵抗の逆数であることがわかる。

課題 1
各点が1が1’に2が2’などと対応する点に行く様な曲線阿弥陀をつくれ。二問







完全グラフ K6

課題 2
6 点を全て繋いだ完全グラフ K6 を 2 倍化して平面化せよ