数学アラカルト第 5 回　15 パズルと変換群

§1. 変換

　数学用語で変換というものがあります．変換とはある集合の元(要素)に別の元を対応させるもの(写像)のことです．ものの状態(順番や位置)を変える操作のことです．ゲーム

§2. 15 パズルの変換と合成

　皆さんも 15 パズルというものをやったことがあると思います．

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

A	B
1	2
3	
C	D

図 1　　15 パズル　　　　3 パズル

このように 15 の数字が書かれた正方形ピースを動かして順番を正しくするパズルです．これは 15 パズルの変換を使ってピースの順番を換えていることになります．いきなり 15 パズルでは解り難いので，最初は 3 パズルから始めましょう．

3 パズル

　図のように，ピースそのものとは別に，各升目の位置を A, B, C, D とします．変換を解りやすくするために右下の角 D の升目はピースが無く，常に空いていることにします．実際に変換を考えてみると

・3 を C から D へ，1 を A から C へ，2 を B から A へ，3 を D から B へ

・2 を B から D へ，1 を A から B へ，3 を C から A へ，2 を D から C へ

という 2 通りの変換が考えられます．上の変換を T_1，下の変換を T_2 とし，

$T_1 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$ と表すことにします．上の段が初めの位置，下の段が変換後の位置です．

すると，$T_2 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$ となります．

A	B
2	3
1	
C	D

図 2

　変換はピースの配置には関係ありません．パズルが図 2 のような配置なら T_1 は

・1 を C から D へ，2 を A から C へ，3 を B から A へ，1 を D から B へ

となります．あくまで，その場所にあるピースを動かすプロセスだけを表しています．

　一般には，ピースの位置を完成形(図 1)のときにその場所にあるピースの番号を使って表すことが多いようです．その表し方ではそれぞれ　A → 1，　B → 2，　C → 3　となるの

で，$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$となります．今後はこの表し方にします．

二つの変換を続けて行うとそれもまた変換になります．これを合成といいます．例えば T_1 と T_2 を続けて行なう変換を T_1 と T_2 の合成といい $T_1 \cdot T_2$ で表します．

$T_1 \cdot T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$となります．つまり $T_1 \cdot T_2$ は何も換えない変換です．一般にこうした何も換えない変換を恒等変換といいます．この講義では今後，恒等変換を E で表すことにします．つまり $T_1 \cdot T_2 = E$ です．要するに T_2 は T_1 の変換を元に戻す変換なのです．このような変換を逆変換といいます．T_2 は T_1 の逆変換です．

$$T_1^{\ 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = T_2, \quad T_2^{\ 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = T_1,$$

ここで T^2 は $T \cdot T$ を表します．ですから T を 2 回繰り返す変換です．$T_1 \cdot T_2 = T_2 \cdot T_1 = E$ ですから E, T_1, T_2 の 3 つが 3 パズルの変換のすべてです．図 1 の完成形にこの変換を行うと次の 3 つのパターンになります．逆にいうと，この 3 パターンのときは(変換により)3 パズルは解けることになります．これ以外の 3 つのパターンは解けません．

1	2
3	

2	3
1	

3	1
2	

図 3　3 パズルの解けるパターン

1	3
2	

2	1
3	

3	2
1	

解けないパターン

5 パズル

次は 5 パズルにしてみましょう．図 4 のようにしました．

1	2	3
4	5	

図 4　5 パズル

A	B	C
D	E	F

5 パズルの位置

5 パズルの変換は全部で何個あるでしょう？最初に 1 列目の A, D を止めて，3 パズルのように移動させる $T_1 = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ A & E & B & D & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

1	2	3
4	5	

→

1	3	5
4	2	

という変換と 5 個のピースを順に動かす $T_2 = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ D & A & B & E & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

1	2	3
4	5	

→

2	3	5
1	4	

という変換を考えました.

図 4 の完成形から T_2 の変換を繰り返せば 1, 2, 3, 4, 5 のどのピースも A の位置に移動することができる. A の位置に来るピースの種類によってすべての変換を 5 種類に分類することができます.

1	2	3
4	5	

→

1	＊	＊
＊	＊	

2	＊	＊
＊	＊	

3	＊	＊
＊	＊	

4	＊	＊
＊	＊	

5	＊	＊
＊	＊	

最初は A の位置に 1 のピースが来る変換を考えることにしましょう. つまり, 図 3 で 1(A の位置)を動かさずに 2, 3, 4, 5 を動かす変換を考えればよいでしょう. T_2 の逆変換を T_2' とすると

$$T_3 = T_2 \cdot T_1 \cdot T_2' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

1	2	3
4	5	

→

1	2	5
3	4	

D の位置には T_3 によって (C の位置の)3 が来ます. T_3 の前に T_1 を施せば C の位置に(E の位置の)5 が, T_1^2 を施せば (B の位置の)2 が来きます. ゆえに, D の位置には $T_1 \cdot T_3$ によって 5 が, $T_1^2 \cdot T_3$ によって 2 が来ます.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \mathbf{4} & 5 \\ 1 & 2 & 3 & \mathbf{4} & 5 \end{pmatrix}, T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbf{3} & 4 & 5 \\ 1 & 2 & \mathbf{4} & 5 & 3 \end{pmatrix}, T_1 \cdot T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \mathbf{5} \\ 1 & 3 & 2 & 5 & \mathbf{4} \end{pmatrix},$$

$$T_1^2 \cdot T_3 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{2} & 3 & 4 & 5 \\ 1 & \mathbf{4} & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

1	2	3
4	5	

→

1	2	3
4	5	

1	2	5
3	4	

1	3	2
5	4	

1	5	3
2	4	

結局, 図 3 の完成形に E, T_3, $T_1 \cdot T_3$, $T_1^2 \cdot T_3$ を施せば D の位置には 1 以外のすべてのピースを移動できます. つまり, A の位置に 1, D の位置に 1 以外のピースを移動する変換が存在することになります. A の位置に 2 が来る変換にも 3 が来る変換にも同じように D の位置に A の位置のピース以外のピースを移動できる変換が存在します. これにより変換後の A と D に来るピースのパターン 5･4＝20 種類すべてを達成できる変換が存在することになります.

変換後 A と D の位置に来るピースのパターンが同じになるその他の変換は A と D を固定する変換を施すことによって得られます. A と D を固定する変換は 3 パズルと同じような変換になります. 具体的に E, T_1, T_1^2 の 3 個です.

例 3→1(A)の位置, 5→4(D)の位置にくる場合

1	2	3
4	5	

→ $T_2{}^2$

3	5	4
2	1	

→ $T_1{}^2T_3$

3	1	4
5	2	

→ E

3	1	4
5	2	

→ T_1

3	4	2
5	1	

→ $T_1{}^2$

3	2	1
5	4	

結局 5 パズルの変換は A と D の位置に来るピースの 20 種類のパターンを達成する変換(20 個)と A と D を固定する変換(3 個)の組み合わせによって構成される．従って, 5 パズルの変換の総数は 5･4･3＝60 個です．完成形にこれらの変換を施したパターン(5 パズルが解けるパターン)の総数も 60 個です. 5 個のピースを A から D までの位置に配置する方法は全部で 5!=5･4･3･2･1=120 なので，解けないパターンも 60 個です.

このように変換後 A の位置に来るピースによって 5 パズルの変換は 5 種類に分けることができます．これを類別といい，分けられた変換の集合を類といいます．また，各類からどれか 1 つの変換を選んで，類の代表といい，代表だけを集めた集合を代表系といいます．例えば

$$E=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & 2 & 3 & 4 & 5\\ \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}, T_2=\begin{pmatrix}1 & \mathbf{2} & 3 & 4 & 5\\ 4 & \mathbf{1} & 2 & 5 & 3\end{pmatrix}, T_2{}^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & \mathbf{3} & 4 & 5\\ 5 & 4 & \mathbf{1} & 3 & 2\end{pmatrix},$$

$$T_2{}^3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \mathbf{5}\\ 3 & 5 & 4 & 2 & \mathbf{1}\end{pmatrix}, T_2{}^4=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \mathbf{4} & 5\\ 2 & 3 & 5 & \mathbf{1} & 4\end{pmatrix}$$

がこの類別の 1 つの代表系(の例)です.

15 パズル

15 パズルの変換についても基本的には 5 パズルのときと同じです．完成形(図 1)からいろいろな変換を施せば, 1 のピースのある位置には, 1 から 15 までどのピースでも移動できることが解かります．同様に 1 のピースの位置にあるピースを動かさずに, 2 のピースの位置にそれ以外の任意のピースを移動することができます．以下同様に 1, 2 の位置のピースを動かさずに 3 の位置にそれ以外の任意のピースを移動することができます. 1, 2, 3 のピースを動かさずに……. 実際，ランダムにかき混ぜたパズルを解くときは，完成した部分を崩さないように次のピースを完成させていくことができます.

従って, 15 パズルの変換全体は 1 のピースのある位置に来るピースによって 15 の類に類別されます．同様に, 15 の各類は, 2 のピースの位置に来るピースによって 14 の類に類別さ

れます. 以下同様に, 3, 4, … の位置に来るピースによって 13, 12, … の類に類別されます. 最後に来るべきピースが決まっていない位置(位置が決まっていないピース)が 3 個になったときは, やはり 3 パズルと同じで, それらを固定する変換が 3 個存在します. 結局 15 パズルの変換の総数は 15･14･13･…･3. ピースをランダムに配置する方法は 15!= 15･14･13･…･3･2･1 ですから, 15 パズルの場合も解けるパターンと解けないパターンは半数ずつになります.

§2. 変換群

群の定義

集合 G 上に演算・が定義されていて, 次の 3 つの性質を満たすとき G は群(group)であるという.

1. 演算の結合法則　$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$.
2. 単位元の存在　任意の元 a に対して $a\cdot e = e\cdot a = a$ を満たす元 e が存在する.
3. 逆元の存在　任意の元 a に対して $a\cdot x= x\cdot a = e$ を満たす元 x が存在する.

例 1　整数の全体 $\boldsymbol{Z}$ や有理数の全体 $\boldsymbol{R}$ は加法(＋)を演算として群になります. これを加法群といいます. 有理数や実数の全体から 0 を除いた集合は乗法(×, ・)を演算として群になります. これを乗法群といいます.

例 2　同じ型の行列の全体は加法を演算として群になります. 同じ型の正則な行列(逆行列が存在する行列)の全体は乗法を演算として群になります.

例 3　整数の 3 を法とする剰余類の全体 Z_3 は加法を演算として群になります. 3 を法とする既約剰余類の全体 Z_3^* は乗法を演算として群になります. 一般に n を法とする剰余類 Z_n, 既約剰余類 Z_n^* はそれぞれ加法, 乗法を演算として群になります.

変換群　合成を変換の演算とすると次のようになります.

1. 合成は結合法則を満たす.
2. 単位元は恒等変換 E である.
3. 逆元は逆変換である.

よって変換の全体は群になります. これを変換群といいます.

群の位数　群 G に含まれる元の個数を G の位数(order)といいます.

例　Z_3 の位数は 3, Z_3^* の位数は 2 です. 一般に Z_n の位数は n, Z_n^* の位数は $\phi(n)$です.

例　3 パズルの変換群の位数は 3, 5 パズルの変換群の位数は 60 です.

部分群　群 G の部分集合 H が群の 3 つの性質を持つとき, H を G の部分群といいます.
Hが部分群であるためにはHが演算に関して閉じており, 単位元を含み, Hのすべての元について逆元を含んでいることが必要です.

例　整数の加法群 $\boldsymbol{Z}$ について偶数の全体 $2\boldsymbol{Z}$ や 3 の倍数の全体 $3\boldsymbol{Z}$ は $\boldsymbol{Z}$ の部分群です. 一般に n の倍数の全体 $n\boldsymbol{Z}$ も $\boldsymbol{Z}$ の部分群です.

例　5 パズルの変換群について 1(のピースの位置)を固定する変換

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

の全体は部分群になります. これを(1 の)固定部分群といいます.

類別　群 G の部分群 H があるとき G をいくつかの部分集合 g_1H, g_2H, …に分けることができます. これを群 G の部分群 H による類別(正確には分解といいます)といいます.

例　$\boldsymbol{Z}$ の $3\boldsymbol{Z}$ による類別が剰余類 $\boldsymbol{Z}_3$ です.

レポート課題 1　次の 5 パズルの問題を図 3 の完成形に移動させる変換を T_1, T_2, T_3 によって表せ.

(1)

1	5	3
2	4	

(2)

2	4	1
5	3	