

§ 1. 変換

数学用語で変換というものがあります. 変換とはある集合の元(要素)に別の元を対応させるもの(写像)のことです. ものの状態(順番や位置)を変える操作のことです. ゲーム

§ 2. 15 パズルの変換と合成

皆さんも 15 パズルというものをやったことがあると思います.

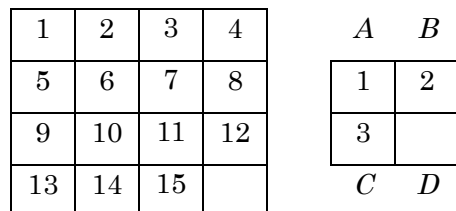


図 1 15 パズル 3 パズル

このように 15 の数字が書かれた正方形ピースを動かして順番を正しくするパズルです. これは 15 パズルの変換を使ってピースの順番を換えていることになります. いきなり 15 パズルでは解り難いので, 最初は 3 パズルから始めましょう.

3 パズル

図のように, ピースそのものとは別に, 各升目の位置を A, B, C, D とします. 変換を解りやすくするために右下の角 D の升目はピースが無く, 常に空いていることにします. 実際に変換を考えてみると

- ・ 3 を C から D へ, 1 を A から C へ, 2 を B から A へ, 3 を D から B へ
- ・ 2 を B から D へ, 1 を A から B へ, 3 を C から A へ, 2 を D から C へ

という 2 通りの変換が考えられます. 上の変換を T_1 , 下の変換を T_2 とし,

$T_1 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$ と表すことにします. 上の段が初めの位置, 下の段が変換後の位置です.

すると, $T_2 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$ となります.

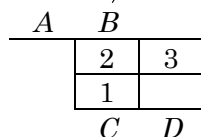


図 2

変換はピースの配置には関係ありません. パズルが図 2 のような配置なら T_1 は

- ・ 1 を C から D へ, 2 を A から C へ, 3 を B から A へ, 1 を D から B へ

となります. あくまで, その場所にあるピースを動かすプロセスだけを表しています.

一般には, ピースの位置を完成形(図 1)のときにその場所にあるピースの番号を使って表すことが多いようです. その表し方ではそれぞれ $A \rightarrow 1, B \rightarrow 2, C \rightarrow 3$ となるの

で, $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ となります. 今後はこの表し方にします.

二つの変換を続けて行くとそれもまた変換になります. これを合成といいます. 例えば T_1 と T_2 を続けて行なう変換を T_1 と T_2 の合成といい $T_1 \cdot T_2$ で表します.

$$T_1 \cdot T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ となります. つまり } T_1 \cdot T_2 \text{ は何も換えない変換です. 一般}$$

にこうした何も換えない変換を恒等変換といいます. この講義では今後, 恒等変換を E で表すことにします. つまり $T_1 \cdot T_2 = E$ です. 要するに T_2 は T_1 の変換を元に戻す変換なのです. このような変換を逆変換といいます. T_2 は T_1 の逆変換です.

$$T_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = T_2, \quad T_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = T_1,$$

ここで T^2 は $T \cdot T$ を表します. ですから T を 2 回繰り返す変換です. $T_1 \cdot T_2 = T_2 \cdot T_1 = E$ ですから E, T_1, T_2 の 3 つが 3 パズルの変換のすべてです. 図 1 の完成形にこの変換を行うと次の 3 つのパターンになります. 逆にいうと, この 3 パターンのときは(変換により)3 パズルは解けることとなります. これ以外の 3 つのパターンは解けません.

1	2
3	

2	3
1	

3	1
2	

1	3
2	

2	1
3	

3	2
1	

図 3 3 パズルの解けるパターン

解けないパターン

5 パズル

次は 5 パズルにしてみましょう. 図 4 のようにしました.

1	2	3
4	5	

A	B	C
D	E	F

図 4 5 パズル

5 パズルの位置

5 パズルの変換は全部で何個あるでしょう? 最初に 1 列目の A, D を止めて, 3 パズルのよう

$$\text{に移動させる } T_1 = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ A & E & B & D & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

1	2	3
4	5	

 \rightarrow

1	3	5
4	2	

$$\text{という変換と 5 個のピースを順に動かす } T_2 = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ D & A & B & E & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

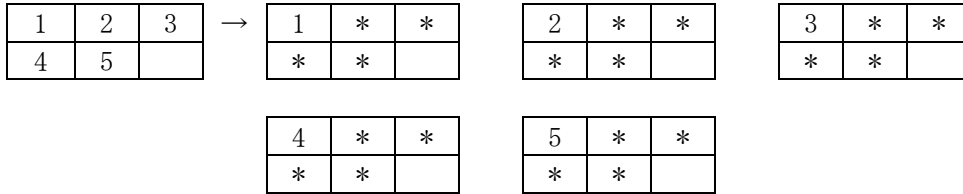
1	2	3
4	5	

 \rightarrow

2	3	5
1	4	

という変換を考えました.

図4の完成形から T_2 の変換を繰り返せば 1, 2, 3, 4, 5 のどのピースも A の位置に移動することができる. A の位置に来るピースの種類によってすべての変換を 5 種類に分類することができます.



最初は A の位置に 1 のピースが来る変換を考えることにしましょう. つまり, 図3で 1(A の位置)を動かさずに 2, 3, 4, 5 を動かす変換を考えればよいでしょう. T_2 の逆変換を T_2' とすると

$$T_3 = T_2 \cdot T_1 \cdot T_2' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

1	2	3
4	5	

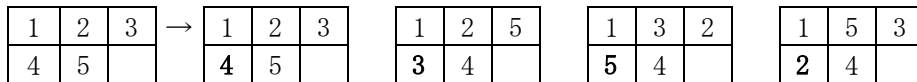
 \rightarrow

1	2	5
3	4	

D の位置には T_3 によって (C の位置の)3 が来ます. T_3 の前に T_1 を施せば C の位置に(E の位置の)5 が, T_1^2 を施せば (B の位置の)2 が来きます. ゆえに, D の位置には $T_1 \cdot T_3$ によって 5 が, $T_1^2 \cdot T_3$ によって 2 が来ます.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \mathbf{4} & 5 \\ 1 & 2 & 3 & \mathbf{4} & 5 \end{pmatrix}, T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbf{3} & 4 & 5 \\ 1 & 2 & \mathbf{4} & 5 & 3 \end{pmatrix}, T_1 \cdot T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \mathbf{5} \\ 1 & 3 & 2 & 5 & \mathbf{4} \end{pmatrix},$$

$$T_1^2 \cdot T_3 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{2} & 3 & 4 & 5 \\ 1 & \mathbf{4} & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$



結局, 図3の完成形に E , T_3 , $T_1 \cdot T_3$, $T_1^2 \cdot T_3$ を施せば D の位置には 1 以外のすべてのピースを移動できます. つまり, A の位置に 1, D の位置に 1 以外のピースを移動する変換が存在することになります. A の位置に 2 が来る変換にも 3 が来る変換にも同じように D の位置に A の位置のピース以外のピースを移動できる変換が存在します. これにより変換後の A と D に来るピースのパターン $5 \cdot 4 = 20$ 種類すべてを達成できる変換が存在することになります.

変換後 A と D の位置に来るピースのパターンが同じになるその他の変換は A と D を固定する変換を施すことによって得られます. A と D を固定する変換は 3 パズルと同じような変換になります. 具体的に E , T_1 , T_1^2 の 3 個です.

例 3→1(A)の位置, 5→4(D)の位置にくる場合

1	2	3	→	3	5	4	→	3	1	4	→	3	1	4
4	5		T_2^2	2	1		$T_1^2 T_3$	5	2		E	5	2	

→	3	4	2
T_1	5	1	

→	3	2	1
T_1^2	5	4	

結局 5 パズルの変換は A と D の位置に来るピースの 20 種類のパターンを達成する変換 (20 個) と A と D を固定する変換 (3 個) の組み合わせによって構成される。従って、5 パズルの変換の総数は $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ 個です。完成形にこれらの変換を施したパターン (5 パズルが解けるパターン) の総数も 60 個です。5 個のピースを A から D までの位置に配置する方法は全部で $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ なので、解けないパターンも 60 個です。

このように変換後 A の位置に来るピースによって 5 パズルの変換は 5 種類に分けることができます。これを類別といい、分けられた変換の集合を類といいます。また、各類からどれか 1 つの変換を選んで、類の代表といい、代表だけを集めた集合を代表系といいます。例えば

$$E = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{2} & 3 & 4 & 5 \\ 4 & \mathbf{1} & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}, T_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbf{3} & 4 & 5 \\ 5 & 4 & \mathbf{1} & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$T_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \mathbf{5} \\ 3 & 5 & 4 & 2 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, T_2^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \mathbf{4} & 5 \\ 2 & 3 & 5 & \mathbf{1} & 4 \end{pmatrix}$$

がこの類別の 1 つの代表系 (の例) です。

15 パズル

15 パズルの変換についても基本的には 5 パズルのときと同じです。完成形 (図 1) からいろいろな変換を施せば、1 のピースのある位置には、1 から 15 までどのピースでも移動できることが解かります。同様に 1 のピースの位置にあるピースを動かさずに、2 のピースの位置にそれ以外の任意のピースを移動することができます。以下同様に 1, 2 の位置のピースを動かさずに 3 の位置にそれ以外の任意のピースを移動することができます。1, 2, 3 のピースを動かさずに……。実際、ランダムにかき混ぜたパズルを解くときは、完成した部分を崩さないように次のピースを完成させていくことができます。

従って、15 パズルの変換全体は 1 のピースのある位置に来るピースによって 15 の類に類別されます。同様に、15 の各類は、2 のピースの位置に来るピースによって 14 の類に類別さ

れます。以下同様に, 3, 4, ... の位置に来るピースによって 13, 12, ... の類に類別されます。最後に来るべきピースが決まっていない位置(位置が決まっていないピース)が 3 個になったときは, やはり 3 パズルと同じで, それらを固定する変換が 3 個存在します。結局 15 パズルの変換の総数は $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdots 3$ 。ピースをランダムに配置する方法は $15! = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ ですから, 15 パズルの場合も解けるパターンと解けないパターンは半数ずつになります。

§2. 変換群

群の定義

集合 G 上に演算 \cdot が定義されていて, 次の 3 つの性質を満たすとき G は群(group)であるという。

1. 演算の結合法則 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
2. 単位元の存在 任意の元 a に対して $a \cdot e = e \cdot a = a$ を満たす元 e が存在する。
3. 逆元の存在 任意の元 a に対して $a \cdot x = x \cdot a = e$ を満たす元 x が存在する。

例 1 整数の全体 \mathbf{Z} や有理数の全体 \mathbf{R} は加法 (+) を演算として群になります。これを加法群といいます。有理数や実数の全体から 0 を除いた集合は乗法 (\times , \cdot) を演算として群になります。これを乗法群といいます。

例 2 同じ型の行列の全体は加法を演算として群になります。同じ型の正則な行列(逆行列が存在する行列)の全体は乗法を演算として群になります。

例 3 整数の 3 を法とする剰余類の全体 \mathbf{Z}_3 は加法を演算として群になります。3 を法とする既約剰余類の全体 \mathbf{Z}_3^* は乗法を演算として群になります。一般に n を法とする剰余類 \mathbf{Z}_n , 既約剰余類 \mathbf{Z}_n^* はそれぞれ加法, 乗法を演算として群になります。

変換群 合成を変換の演算とすると次のようになります。

1. 合成は結合法則を満たす。
2. 単位元は恒等変換 E である。
3. 逆元は逆変換である。

よって変換の全体は群になります。これを変換群といいます。

群の位数 群 G に含まれる元の個数を G の位数(order)といいます。

例 \mathbf{Z}_3 の位数は 3, \mathbf{Z}_3^* の位数は 2 です。一般に \mathbf{Z}_n の位数は n , \mathbf{Z}_n^* の位数は $\phi(n)$ です。

例 3 パズルの変換群の位数は 3, 5 パズルの変換群の位数は 60 です。

部分群 群 G の部分集合 H が群の 3 つの性質を持つとき, H を G の部分群といいます.

H が部分群であるためには H が演算に関して閉じており, 単位元を含み, H のすべての元について逆元を含んでいることが必要です.

例 整数の加法群 \mathbf{Z} について偶数の全体 $2\mathbf{Z}$ や 3 の倍数の全体 $3\mathbf{Z}$ は \mathbf{Z} の部分群です. 一般に n の倍数の全体 $n\mathbf{Z}$ も \mathbf{Z} の部分群です.

例 5 パズルの変換群について 1 (のピースの位置) を固定する変換

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

の全体は部分群になります. これを (1) の固定部分群といいます.

類別 群 G の部分群 H があるとき G をいくつかの部分集合 g_1H, g_2H, \dots に分けることができます. これを群 G の部分群 H による類別 (正確には分解といいます) といいます.

例 \mathbf{Z} の $3\mathbf{Z}$ による類別が剰余類 \mathbf{Z}_3 です.

レポート課題 1 次の 5 パズルの問題を図 3 の完成形に移動させる変換を T_1, T_2, T_3 によって表せ.

(1)

1	5	3
2	4	

(2)

2	4	1
5	3	