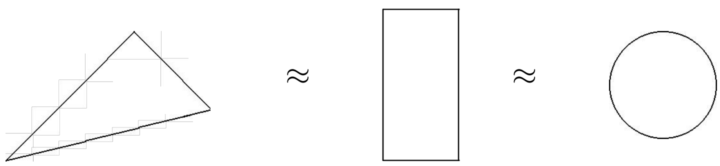
数学アラカルト第13回　図形の基本群.

§1. 図形の同相

　まず、3角形、長方形、円という3つの図形を考えてみましょう。これらは合同でも相似でもないので全く違う図形に見えるかもしれません。しかし、これらが柔らかいゴムでできているとするとどうでしょうか？伸ばしたり縮めたりして互いに変形できるので同じ(性質をもつ)ものと考えることができないでしょうか？このように，図形がゴムのように柔らかいものでできていると考えて伸ばしたり縮めたりして互いに変形できるとき，これらを同相な図形と呼びます。図形を合同な関係で分類するユークリッド幾何学に対して、**同相な関係で分類する幾何学を位相幾何学 (topology)** といいます。このセクションでは，様々な図形を同相な関係で分類してみることにしましょう。以後、2つの図形 X と Y が同相であるとき

$$X \approx Y$$

と表すことにします。



例 1. $A \approx R$

例 2. $E \approx F \approx T \approx Y$

演習 1. アルファベット26文字を同相な関係で分類せよ。

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H,\ I,\ J,\ K,\ L,\ M,$$
$$N,\ O,\ P,\ Q,\ R,\ S,\ T,\ U,\ V,\ W,\ X,\ Y,\ Z$$

注意. このように，図形が同相かどうかを直接変形して調べるのはかなり手間がかかります。次のセクションでは、それを調べる道具(基本群)を作る準備をします。

§2. ループの変形 (ホモトピー)

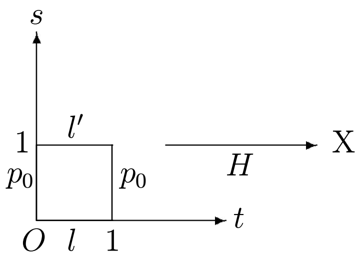
xy 平面と xy 平面から円板をくり抜いた図形を考えましょう。これらは直感的には同相ではないことがわかりますが理論的にはどのようにしてわかるのでしょうか？この場合、次のように考えます。図形の中の適当な点を基点とするループを (いくつか) 考えます。xy 平面ではどのループも連続的な変形で互いに移りあえますが、xy 平面から円板をくり抜いた図形ではくり抜いた円板が障害物となるため、円板の上を通るループと下を通るループとはどのように変形しても移りあえません。このように、図形の中のループの連続的な変形の仕方の違いで 2 つの図形を区別することができます。ここではループとその連続的な変形 (ホモトピー) をきちんと定義し、性質を説明することにします。

定義 1(ループ). 閉区間 $[0,1]$ から図形 X への連続な写像 (関数) l で始点と終点が等しいもの，すなわち，$l(0)=l(1)$ となるものをループといいます。以後、$l(0)=l(1)=p_0$ とします。

定義 2(ホモトピー). l と l' をループとします。次の (1), (2) を満たす辺の長さ 1 の正方形から X への連続な写像 H が存在するとき、l と l' はホモトピックであるといい、$l \simeq l'$ と表します。また、この写像 H を l から l' へのホモトピーといいます。

(1) $H(t,0)=l(t),\ H(t,1)=l'(t) \quad (0 \le t \le 1)$

(2) $H(0,s)=H(1,s)=p_0 \quad (0 \le s \le 1)$



注意. ホモトピックの関係は次の 3 つの性質 (法則) を満たします。これを**同値関係**といいます。

(1) (同一律) $l \simeq l$

(2) (対称律) $l \simeq l' \Rightarrow l' \simeq l$

(3) (推移律) $l \simeq l',\ l' \simeq l'' \Rightarrow l \simeq l''$

(同一律) を示すには、l から l へのホモトピーを $H(t,s)=l(t)$ と定めればよいことがわかります。(対称律) では H を l から l' へのホモトピーとしたとき、l' から l へのホモトピー H' を $H'(t,s)=H(t,1-s)$ と定めればよいことがわかります。なぜなら、

(1) $H'(t,0)=H(t,1)=l'(t),\ H'(t,1)=H(t,0)=l(t) \quad (0 \le t \le 1)$

(2) $H'(0,s)=H'(1,s)=H(0,1-s)=p_0 \quad (0 \le s \le 1)$

となるからです。簡単に言えば、写像 H' は正方形の上下をひっくり返してできたものです。

演習 2. (推移律) $l \simeq l',\ l' \simeq l'' \Rightarrow l \simeq l''$ を示せ。

次に、2つのループを使って新しいループを作りましょう。

定義 3(ループの積). 2つのループ l と m に対して，これらをつないだループを積といい，$l \cdot m$ と表します。正確には、

$$(l \cdot m)(t) = \begin{cases} l(2t) & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ m(2t-1) & \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

と定めます。

注意 1. $l \cdot m$ は 0 から $\dfrac{1}{2}$ までは l で，$\dfrac{1}{2}$ から 1 までは m となっています。

注意 2. 同様にして $m \cdot l$ も作れますが，$l \cdot m$ とはホモトピックにはなりません。(これを非可換といいます)

ループの積とホモトピックとの間には次の性質が成り立ちます。ただし、最初から終わりまでずっと p_0 のまま動かないループを $\tilde{p_0}$、l と逆をたどるループを l^{-1} とします。正確には、

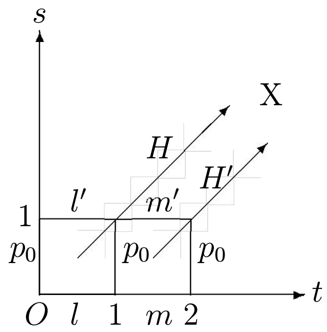
$$\begin{aligned} \tilde{p_0}(t) &= p_0 \\ l^{-1}(t) &= l(1-t) \end{aligned} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

と定めます。

性質.

$$\begin{aligned} &(1)\ l \simeq l',\ m \simeq m' \Rightarrow l \cdot m \simeq l' \cdot m' \\ &(2)\ l \cdot \tilde{p_0} \simeq \tilde{p_0} \cdot l \simeq l \\ &(3)\ l \cdot l^{-1} \simeq l^{-1} \cdot l \simeq \tilde{p_0} \\ &(4)\ (l \cdot m) \cdot n \simeq l \cdot (m \cdot n) \end{aligned}$$

証明のアイデア. (1) l から l' へのホモトピーおよび m から m' へのホモトピーをそれぞれ $H,\ H'$ とすると、定義からとなります。(2) と (4) から正方形を横にくっつけ横の長さが 2 の横長の長方形ができることができます。このとき、(1) と (3) から下底は $l \cdot m$ で上底は $l' \cdot m'$ となることがわかります。これはまさに $l \cdot m$ から $l' \cdot m'$ へのホモトピーを与えています (次ページ図参照)。 □



演習 3.　性質 (2) を図を用いて示せ。

§ 3. 基本群

図形 X 上のループで互いにホモトピックなものはすべて同じものとみなした集合 (同値類という) を $\pi_1(X, p_0)$ と表します。この集合の要素 (元) を $[l]$ (l はループ) と表すことにします。$\pi_1(X, p_0)$ の要素 $[l]$, $[m]$ に対して、演算 $[l] \cdot [m]$ を

$$[l] \cdot [m] = [l \cdot m]$$

と定めます。ここで、[　] の中の『・』は 2 つのループ l と m の積です。性質 (1) からこの演算は矛盾なく定義されていることがわかります。さらに性質 (2) から単位元は $[\tilde{p_0}]$ であり、性質 (3) から $[l]$ の逆元は $[l^{-1}]$ となることがわかります。さらに性質 (4) から結合法則が成り立つことがわかります。以上から、$\pi_1(X, p_0)$ は群をなすことがわかります。これを**図形 X の基本群**といいます。3 ページの注意 2 で指摘したように $l \cdot m \simeq m \cdot l$ とは限りませんから、基本群は一般には非可換群です。基本群には次の性質があります。

基本群の性質.

$$X \approx Y \Rightarrow \pi_1(X, p_0) \cong \pi_1(Y, q_0) \quad (\text{群として同型})$$

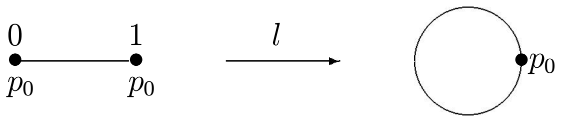
簡単な図形に対する基本群の計算例は次のようになります。

例 1.　D^2 を円板、S^2 を球面とすると、これら 2 つの図形には障害物がありませんから、どんな (D^2, S^2 上の) ループもスムーズに $\tilde{p_0}$ に変形できます。したがって、

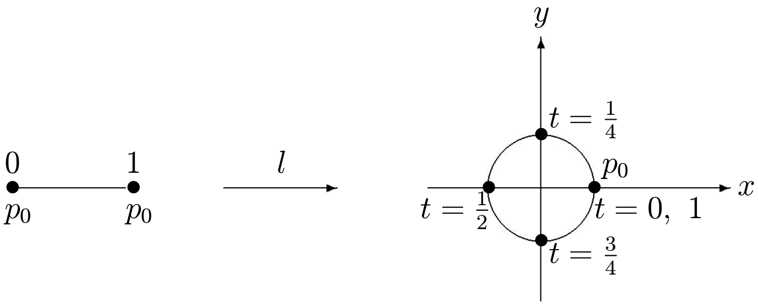
$$\pi_1(D^2, p_0) \cong \pi_1(S^2, p_0) = \{[\tilde{p_0}]\} = \{e\} \quad (\text{自明群})$$

例 2. S^1 を円周とすると、$\pi_1(S^1, p_0) \cong \mathbb{Z}$ (整数のなす加法群)

証明のアイデア. $\pi_1(S^1, p_0)$ から一つ要素 $[l]$ をとります。l は S^1 上のループですから、下図のような写像となります。



例えば、$l(t) = (\cos 2\pi t,\ \sin 2\pi t) \quad (0 \leq t \leq 1)$ とすると、t が 0 から 1 まで動くとき l(の像) は S^1 を**半時計回りに 1 回転**することがわかります (下図参照)。同様に、$l(t) = (\cos 4\pi t,\ \sin 4\pi t),\ l(t) = (\cos(-2)\pi t,\ \sin(-2)\pi t)$ のときはそれぞれ S^1 を半時計回りに 2 回転、半時計回りに (-1) 回転 (すなわち、時計回りに 1 回転) することがわかります。このように、S^1 上のループは S^1 を何回かまわることがわかります。この回数 (整数) を**回転数**といいます。これから $\pi_1(S^1, p_0) \cong \mathbb{Z}$ が得られます。 $\square$



注意. 基本群の性質の対偶：

$$\pi_1(X, p_0) \not\cong \pi_1(Y, q_0) \Rightarrow X \not\approx Y$$

と例 1, 2 から、$D^2 \not\approx S^1,\ S^2 \not\approx S^1$ がわかります。

§4.　応用.

　ここでは、ホモトピーや基本群を使った 2 つの応用 (不動点定理と代数学の基本定理) を紹介しましょう。まずは不動点の定義です。

定義 (不動点).　図形 X から自分自身の写像によって動かない点を不動点といいます。(すなわち, $f(x) = x$ となる点 x のこと)

例 1.　$f(x) = x$ である写像 (恒等写像といいます) はすべての点が不動点です。

例 2.　回転行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ で表される線形写像は原点だけが不動点です。

例 3.　平行移動を表す写像 $f(x, y) = (x + a, y + b)$ $(a, b \neq 0)$ には不動点はありません。

このとき、次が成り立ちます。D^2 を円板、S^1 を円周とします。

補題.　D^2 から (そのふちである)S^1 への連続な写像で S^1 上の点を動かさない (不動点) ものは存在しない。

補題の証明の概略.　このような D^2 から S^1 への連続な写像 g があると仮定して矛盾を導きます (この証明法を背理法といいます)。仮定より S^1 上の任意の点 p について $g(p) = p$ となります。S^1 から D^2 への連続な写像 i を $i(p) = p$ と定める (これを包含写像といいます) と、i と g の合成写像 $g \circ i$ は S^1 上の恒等写像 (何も動かさない写像) id_{S^1} に一致します。実際、S^1 上の任意の点 p について

$$(g \circ i)(p) = g(i(p)) = g(p) = p$$

となるからです。これは次の図式が (ベクトルの和のように) 成り立つことを意味しています。

$$\begin{tikzcd} & D^2 \arrow[dr, "g"] & \\ S^1 \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "id_{S^1}"'] & & S^1 \end{tikzcd} \qquad g \circ i = id_{S^1}$$

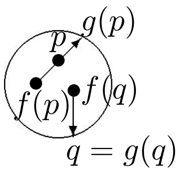
このとき、これらの図形の基本群をとっても同様な図式が成り立つことが知られています (下図参照)。

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(D^2, p_0) \arrow[dr, "g_*"] & \\ \pi_1(S^1, p_0) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[rr, "id_{\pi_1(S^1, p_0)}"'] & & \pi_1(S^1, p_0) \end{tikzcd} \qquad g_* \circ i_* = id_{\pi_1(S^1, p_0)}$$

ここで、4、5ページの例で説明したように $\pi_1(D^2, p_0) = \{e\}$, $\pi_1(S^1, p_0) \cong \mathbb{Z}$ ですから、$\pi_1(S^1, p_0)$ の任意の要素 $[l]$ について
$$g_* \circ i_*([l]) = g_*(i_*([l])) = g_*([\tilde{p_0}]) = [\tilde{p_0}] = e$$
となります。一方、
$$id_{\pi_1(S^1, p_0)}([l]) = [l]$$
ですから、$g_* \circ i_* = id_{\pi_1(S^1, p_0)}$ に矛盾します。 $\square$

定理 1(ブラウエルの不動点定理). D^2 から自身への連続な写像は必ず不動点をもつ。

ブラウエルの不動点定理の証明. これも背理法で示します。すなわち、不動点をもたない D^2 から自身への連続な写像 f があるとして矛盾を導きます。D^2 から S^1 への連続な写像 g を次のように定めます (下図参照)。f は不動点をもたないので、D^2 の上の任意の点 p について $f(p) \neq p$ です。そこで、$f(p)$ と p を結ぶ線分と S^1 との交点を $g(p)$ とします。特に、q が S^1 上にあるときは $f(q)$ と q を結ぶ線分と S^1 との交点は一致します。よって、$g(q) = q$ となり補題に矛盾します。 $\square$



最後に、代数学の基本定理とよばれる定理を紹介しましょう。例えば、2 次方程式は複素数の範囲で (重解を含めて)2 個の解をもちます。3 次方程式では 3 個の解をもちます。このように、**方程式の解の個数はちょうど最高次の次数に一致します。**

定理 2(代数学の基本定理). n 次方程式

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

は、複素数の範囲で (重解を含めて)n 個の解をもつ。

代数学の基本定理の証明の概略. $a_n = 1$ のときを示せば十分なので、まず $P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ とおいて $P(z_1) = 0$ となる z_1 があることを示します。$f(z) = z^n$ (n は自然数) とおくと、$P(z) \simeq f(z)$ (一般の意味でのホモトピック) となります。実際、

$$H(z,t) = z^n + (1-t)(a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0)$$

とおくと、$H(z,0) = P(z),\ H(z,1) = f(z)$ となるからです。$f(z) = z^n$ とホモトピックな写像は全射 (任意の (複素数)z' に対して $g(z) = z'$ となる z が少なくとも 1 つ存在する) となることが知られているので、$P(z)$ は全射であることがわかります。よって、$P(z_1) = 0$ となる z_1 が (少なくとも 1 つ) あります。因数定理より $P(z)$ は

$$P(z) = (z - z_1) Q(z)$$

と表せます。$Q(z) = z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \cdots + b_1 z + b_0$ と表せるので、先程の議論をもう一度使うと $Q(z_2) = 0$ となる z_2 が (少なくとも 1 つ) あることがわかります。よって $Q(z) = (z - z_2) R(z)$ と表せます。以下同様にして、

$$\begin{aligned} P(z) &= z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \\ &= (z - z_1) Q(z) \\ &= (z - z_1)(z - z_2) R(z) \\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n). \end{aligned}$$

と表せます。 □

参考文献.

[1] 『代数学の基本定理』Benjamin Fine、Gerhard Rosenberger 著 (新妻弘、木村哲三訳) 共立出版

[2] 『トポロジー入門』松本幸夫著　岩波書店

[3] 『やさしい位相幾何学の話』横田一郎著　現代数学社