大日本図書　新基礎数学問題集　1 章 § 1 STEP UP 詳しい解答

p.6. 1 章 § 1. 整式の計算　STEP UP

27. (1) 与式 $=\{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\}=a^2-(b+c)^2=a^2-b^2-2bc-c^2$.

(2) 与式 $=\{a^2-(2a-1)\}\{a^2+(2a-1)\}=a^4-(2a-1)^2=a^4-4a^2+4a-1$.

(3) 与式 $=\{x(x+3)\}\{(x+2)(x+1)\}=(x^2+3x)(x^2+3x+2)=(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)=x^4+6x^3+9x^2+2x^2+6x$

$=x^4+6x^3+11x^2+6x$.

(4) 与式 $=\{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24$

$=x^4-10x^3+25x^2+10x^2-50x+24=x^4-10x^3+35x^2-50x+24$.

28. (1) 与式 $=x(2x^2-5xy-3y^2)=x(2x+y)(x-3y)$.

(2) 与式 $=(a+b)(a^2-ab+b^2)+ab(a+b)=(a+b)(a^2-ab+b^2+ab)=(a+b)(a^2+b^2)$.

(3) 与式 $=c(b^2-a^2)+a^2b-b^3=-c(a^2-b^2)+b(a^2-b^2)=(a^2-b^2)(-c+b)=(a+b)(a-b)(b-c)$.

(c について整理)

(4) 与式 $=(x^3-1)(x^3-8)=(x-1)(x^2+x+1)(x-2)(x^2+2x+4)=(x-1)(x-2)(x^2+x+1)(x^2+2x+4)$.

($x^3=X$ とおいてもよい)

(5) 与式 $=2x^2+(y-3)x-y^2+1=2x^2+(y-3)x-(y+1)(y-1)=\{2x-(y+1)\}\{x+(y-1)\}=(2x-y-1)(x+y-1)$.

(6) 与式 $=3x^2+(y+6)x-2y^2+y+3=3x^2+(y+6)x-(2y-3)(y+1)=\{3x-(2y-3)\}\{x+(y+1)\}$

$=(3x-2y+3)(x+y+1)$.

(7) 与式 $=a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+ac^2-a^2c=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}=(b-c)(a-b)(a-c)=-(a-b)(b-c)(c-a)$.

29. 等式 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ について右辺 $=(a+b)\{(a+b)^2-3ab\}=(a+b)(a^2+2ab+b^2-3ab)$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)=$ 左辺. よってこの等式は成り立つ. 因数分解の公式について

左辺 $=a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)-3abc$.

$a+b=A$ とおくと $(a+b)^3+c^3=A^3+c^3=(A+c)(A^2-Ac+c^2)=\{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}$

$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2)$.

$-3ab(a+b)-3abc=-3ab(a+b+c)$ だから左辺 $=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2)-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

30. (1) $P(x)=x^3+6x^2+x+6$ とおくと例題より $P(n)=0$ となる n が存在するなら, その n は 6 の約数 $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$ のどれかである. また $n>0$ なら $P(n)>0$ は明らかだから $-1,-2,-3,-6$ のどれかである.

$P(-1)=10, P(-2)=20, P(-3)=30, P(-6)=0$. よって因数定理より $P(x)=(x+6)(x^2+1)$.

(2) $P(x)=x^4-4x^3-5x^2-2x+10$ とおくと $P(1)=0$. よって因数定理より $P(x)=(x-1)(x^3-3x^2-8x-10)$.

$Q(x)=x^3-3x^2-8x-10$ とおくと例題より $Q(n)=0$ となる n が存在するなら, その n は 10 の約数 $\pm1,\pm2,\pm5,\pm10$ のどれかである. $Q(1)=-20, Q(-1)=-6, Q(2)=-30, Q(-2)=-14, Q(5)=0$. よって

$Q(x)=(x-5)(x^2+2x+2)$. 従って $P(x)=(x-1)(x-5)(x^2+2x+2)$.

31. (1) 与式 $= 4a^4 + 4a^2 + 1 - 4a^2 = (2a^2+1)^2 - (2a)^2 = (2a^2+1+2a)(2a^2+1-2a) = (2a^2+2a+1)(2a^2-2a+1)$.

(2) 与式 $= 4x^4 + 4x^2 + 1 - x^2 = (2x^2+1)^2 - x^2 = (2x^2+1+x)(2x^2+1-x) = (2x^2+x+1)(2x^2-x+1)$.

(3) 与式 $= x^4 - 2x^2 + 1 - 9x^2 = (x^2-1)^2 - (3x)^2 = (x^2-1+3x)(x^2-1-3x) = (x^2+3x-1)(x^2-3x-1)$.

(4) 与式 $= x^4 - 2x^2 + 1 - 4x^2 = (x^2-1)^2 - (2x)^2 = (x^2-1+2x)(x^2-1-2x) = (x^2+2x-1)(x^2-2x-1)$.

32. 除法の等式 $A \div B$ の商を Q, 余りを R とすると $A = BQ + R$ (R の次数 $<$ B の次数).

よって $P(x)$ を x^2-3x-4 で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $R(x)$ とすると $P(x) = (x^2-3x-4)Q(x) + R(x) \cdots$①

で $R(x)$ の次数 $< (x^2-3x-4)$ の次数 $= 2$ だから $R(x)$ の次数 $\leqq 1$, すなわち 1 次式か定数.

従って $R(x) = ax + b$ (a, b は定数) とおける. $x^2-3x-4 = (x-4)(x+1)$ だから①より

$P(x) = (x-4)(x+1)Q(x) + ax + b \cdots$②.

$P(x)$ を $x+1$ で割ったときの余りが 1 だから剰余の定理より $P(-1) = 1$. 同様に $x-4$ で割ったときの余りが 11 だから $P(4) = 11$. よって②より $P(-1) = (-1-4)(-1+1)Q(-1) - a + b = -a + b = 1 \cdots$③,

$P(4) = (4-4)(4+1)Q(4) + 4a + b = 4a + b = 11 \cdots$④. ④ $-$ ③ より $5a = 10$. よって $a = 2$. ③より $-2 + b = 1$.

よって $b = 3$. 従って求める余りは $R(x) = ax + b = 2x + 3$.

33. 除法の等式より $P(x) = Q(x)(x^2+1) + x^3$. よって $P(x) = (x^2+1)Q(x) + x^3$ となるが x^3 は x^2+1 より次数が大きいので x^2+1 で割ったときの余りではない. $x^3 = (x^2+1)x - x$ だから $P(x) = (x^2+1)Q(x) + (x^2+1)x - x = (x^2+1)\{Q(x)+x\} - x$. よって $P(x)$ を x^2+1 で割ったときの余りは $-x$ である.

34. $P(x)$ を $x-2$ で割ったときの商を $Q(x)$ とすると余りは 5 だから $P(x) = (x-2)Q(x) + 5 \cdots$①.

$Q(x)$ を $x+3$ で割ったときの余りは 3 だから剰余の定理より $Q(-3) = 3 \cdots$②.

同様に $P(x)$ を $x+3$ で割ったときの余りは $P(-3)$ であり, ①より $P(-3) = (-3-2)Q(-3) + 5 = -5Q(-3) + 5$.

②より $P(-3) = -15 + 5 = -10$. よって $P(x)$ を $x+3$ で割ったときの余りは -10 である.

$P(x)$ を $x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$ で割ったときの商を $Q_1(x)$, 余りを $R(x)$ とすると問題 32 と同様に $R(x) = ax + b$ とおけて, $P(x) = (x-2)(x+3)Q_1(x) + ax + b$.

①より $P(2) = 5$. また $P(-3) = -10$ であったから $P(2) = (2-2)(2+3)Q_1(2) + 2a + b = 2a + b = 5 \cdots$③,

$P(-3) = (-3-2)(-3+3)Q_1(-3) - 3a + b = -3a + b = -10 \cdots$④. ③ $-$ ④ より $5a = 15$. よって $a = 3$. ③より $6 + b = 5$. よって $b = -1$. 従って $P(x)$ を x^2+x-6 で割ったときの余りは $R(x) = ax + b = 3x - 1$.