

p.18. 2章 § 1. 方程式 STEP UP

93. 方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(1) $x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 1 \cdot (-1)}}{1} = 2 \pm \sqrt{5}$ (2) $x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 1 \cdot (-1)}}{1} = 2 \pm \sqrt{5}$.

(3) $x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 2 \cdot (-3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$. (4) $x = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 5 \cdot 39}}{5} = \frac{14 \pm 1}{5} = 3, \frac{13}{5}$.

94. (1) $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{2} = k$ とおくと $x = 3k, y = 5k, z = 2k \dots \textcircled{1}$. 第2式に代入して $6k - 15k + 2k + 7 = 0$
 $\Rightarrow 7k = 7, k = 1$. $\textcircled{1}$ より $x = 3, y = 5, z = 2$.

(2) $y = x^2 - 4$ より $x^2 = y + 4 \dots \textcircled{1}$. これを第1式に代入して $y + 4 + y^2 = 16 \Rightarrow y^2 + y - 12 = 0$

$(y + 4)(y - 3) = 0, y = -4, 3$. $y = -4$ のとき $\textcircled{1}$ より $x^2 = 0, x = 0$. $y = 3$ のとき $\textcircled{1}$ より $x^2 = 7, x = \pm\sqrt{7}$.

よって $(x, y) = (0, -4), (\pm\sqrt{7}, 3)$.

95. (1) $x^4 - 6x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 - 4x^2 = (x^2 - 1)^2 - (2x)^2 = \{(x^2 - 1) + 2x\}\{(x^2 - 1) - 2x\} = (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x - 1) = 0$.

よって $x^2 + 2x - 1 = 0$ または $x^2 - 2x - 1 = 0$. 93 と同様に

$x = -1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \cdot (-1)}, 1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 1 \cdot (-1)} = -1 \pm \sqrt{2}, 1 \pm \sqrt{2}$.

(2) $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = \{(x^2 + 1) + x\}\{(x^2 + 1) - x\} = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$.

よって $x^2 + x + 1 = 0$ または $x^2 - x + 1 = 0$.

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}, \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$.

96. (1) $\frac{3}{x(x-3)} - \frac{x+2}{x(x+1)} - \frac{17x+1}{(x-3)(x+1)} = \frac{3x}{x+1}$. 両辺に $x(x-3)(x+1)$ をかけて

$3(x+1) - (x+2)(x-3) - x(17x+1) = 3x^2(x-3)$. よって $-3x^3 - 9x^2 + 3x + 9 = -3(x+3)(x^2 - 1) = 0$ より

$x = -3, \pm 1$. $x = -1$ は無縁解だから $x = -3, 1$.

(2) $\sqrt{3x-5} = 2x - 10$. 両辺を2乗して $3x - 5 = (2x - 10)^2 = 4x^2 - 40x + 100$. よって

$4x^2 - 43x + 105 = (x - 7)(4x - 15) = 0$ より $x = 7, \frac{15}{4}$. $x = \frac{15}{4}$ は無縁解だから $x = 7$.

(3) 両辺を2乗して $x - 1 + 4\sqrt{x-1} + 4 = 2x + 5$. よって $4\sqrt{x-1} = x + 2$. 両辺を2乗して $16(x-1) = x^2 + 4x + 4$.

よって $x^2 - 12x + 20 = (x - 2)(x - 10) = 0$. $x = 2, 10$.

97. 静水での速さを毎時 x km とすると上りの速さは毎時 $x - 3$ km, 下りの速さは毎時 $x + 3$ km だから $\frac{60}{x-3} = \frac{60}{x+3} + 5$.

よって $60(x+3) = 60(x-3) + 5(x+3)(x-3)$ より $5x^2 - 405$. $x^2 = 81$. $x > 0$ より $x = 9$. 静水での速さは毎時 9km.

98. $\frac{x}{b-c} = \frac{y}{c-a} = \frac{z}{a-b} = k$ とおくと $x = (b-c)k, y = (c-a)k, z = (a-b)k$. よって

左辺 = $(b+c)(b-c)k + (c+a)(c-a)k + (a+b)(a-b)k = (b^2 - c^2 + c^2 - a^2 + a^2 - b^2)k = 0 =$ 右辺 //

99. $P(x) = x^4 - 4ax^3 + bx^2 + ax - 24$ とおくと $P(-1) = 1 + 4a + b - a - 24 = 3a + b - 23 = 0 \dots \textcircled{1}$,

$P(2) = 16 - 32a + 4b + 2a - 24 = -30a + 4b - 8 = 0$. $15a - 2b + 4 = 0 \dots \textcircled{2}$. $\textcircled{1} \times 5 - \textcircled{2}$ より $7b - 119 = 0, 7b = 119, b = 17$.

$\textcircled{1}$ より $a = 2$. よって $a = 2, b = 17$.

$P(x) = x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24$ は $x = -1, 2$ を解にもつから因数分解よりは $x + 1, x - 2$ を因数にもつ.

よって組立除法などで $P(x) = (x + 1)(x - 2)(x^2 - 7x + 12) = (x + 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$.

$P(x) = 0$ の解は $x = -1, 2, 3, 4$. よって他の解は $x = 3, 4$.

100. (1) $x^3 = 1$ より $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$. よって $x^3 = 1$ の解は $x = 1$ または $x^2 + x + 1 = 0$. 従って

$$x = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2}, \text{ すなわち } x = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

$$\begin{aligned} \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ とすると } \omega^2 &= \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^2 = \frac{1 - 2\sqrt{3}i + 3i^2}{4} = \frac{1 - 2\sqrt{3}i - 3}{4} = \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{4} \\ &= \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}. \text{ 同様に } \omega = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \text{ とすると } \omega^2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}. \text{ よって } x^3 = 1 \text{ の解は } x = 1, \omega, \omega^2. \end{aligned}$$

(2) ω は $x^2 + x + 1 = 0$ の解だから $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.

101. $x = 1 + i$ は $x^3 + px^2 + qx + 6 = 0$ の解だから $(1 + i)^3 + p(1 + i)^2 + q(1 + i) + 6 = 0$. よって

$$1 + 3i + 3i^2 + i^3 + p(1 + 2i + i^2) + q + iq + 6 = 1 + 3i - 3 - i + p(1 + 2i - 1) + q + iq + 6 = 4 + 2i + 2ip + q + iq$$

$$= (4 + q) + i(2 + 2p + q) = 0. \text{ 従って } 4 + q = 0, 2 + 2p + q = 0 \text{ より } q = -4, p = 1. \text{ よって方程式は}$$

$$x^3 + x^2 - 4x + 6 = 0. P(x) = x^3 + x^2 - 4x + 6 \text{ とおくと } P(-3) = -27 + 9 + 12 + 6 = 0. \text{ よって } P(x) = (x + 3)(x^2 - 2x + 2).$$

$$P(x) = 0 \text{ より } x = -3, \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = -3, \frac{2 \pm 2i}{2} = -3, 1 \pm i. \text{ よって残りの解は } -3, 1 - i.$$