大日本図書　新基礎数学問題集　2 章§ 2 BASIC 詳しい解答

p.20. 2 章§ 2. 不等式　BASIC

102. (1) $6x < 17$. $x < \dfrac{17}{6}$.

(2) $5x \geqq 12$. $x \geqq \dfrac{12}{5}$.

(3) $2(2x+3)-(x-6) < 18$. $3x < 6$. $x < 2$.

(4) $4(x+4)-3(2x+3) < 12$. $-2x < 5$. $x > -\dfrac{5}{2}$.

103. 団体の人数を x 人とすると $500x > 500 \times (1-0.2) \times 40, x < 40$. よって $500x > 16000, x < 40$. $32 < x < 40$.

従って 33 人以上 39 人以下.

104. (1) 第 1 式より $-3x > -9 \Rightarrow x < 3$. 第 2 式より $-x > -1 \Rightarrow x < 1$. よって $x < 1$.

(2) 第 1 式より $-x \leqq -1 \Rightarrow x \geqq 1$. 第 2 式より $-11x \geqq -22 \Rightarrow x \leqq 2$. よって $1 \leqq x \leqq 2$.

105. (1) $(x-7)(x+1) \leqq 0$. よって $-1 \leqq x \leqq 7$.

(2) $(2x-1)(x+2) < 0$. よって $-2 < x < \dfrac{1}{2}$.

(3) $12x^2-5x-3 > 0$ より $(3x+1)(4x-3) > 0$. よって $x < -\dfrac{1}{3}, x > \dfrac{3}{4}$.

(4) $p > 1$ より $x \leqq 1, x \geqq p$.

106. (1) $-1 \leqq x \leqq 0, x \geqq 2$.

(2) $(x-1)(x+1)(2x+1) < 0$ より $x < -1, -\dfrac{1}{2} < x < 1$.

107. 左辺 $-$ 右辺 $= ac+bd-ad-bc = a(c-d)-b(c-d) = (a-b)(c-d)$. $a > b, c > d$ より $a-b > 0, c-d > 0$.

よって $(a-b)(c-d) > 0$. 従って左辺 $-$ 右辺 > 0. よって左辺 $>$ 右辺//

108. (1) 左辺 $= 1+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+1 = 2+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$. $a > 0, b > 0$ より $\dfrac{a}{b} > 0, \dfrac{b}{a} > 0$. 相加平均と相乗平均の関係より

$\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2} \geqq \sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}} = 1$. よって $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} \geqq 2$. 従って左辺 $\geqq 2+2 = 4$.

等号が成り立つのは相加平均と相乗平均の関係で等号が成り立つとき, すなわち $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{a}$ のときに限る.

よって $a^2 = b^2$ のときであり, $a > 0, b > 0$ より $a = b$ のときに限り等号は成り立つ.

(2) $a, b, c, d > 0$ より $ab, cd, ac, bd > 0$. よって相加平均と相乗平均の関係より $\dfrac{ab+cd}{2} \geqq \sqrt{abcd}$,

$\dfrac{ac+bd}{2} \geqq \sqrt{acbd} = \sqrt{abcd}$. これらはすべて正の数だから両辺を互いにかけあわせて

$\dfrac{(ab+cd)(ac+bd)}{4} \geqq \sqrt{abcd}^2 = abcd$. よって $(ab+cd)(ac+bd) \geqq 4abcd$.

等号が成り立つのは相加平均と相乗平均の関係で等号が成り立つとき, すなわち $ab = cd$ かつ $ac = bd$ のときである.

よって $a^2bc = bcd^2 \Rightarrow a^2 = d^2$. $a, d > 0$ より $a = d$. よって $b = c$.

以上により $a = d$ かつ $b = c$ のときに限り等号は成り立つ.

109. (1) 左辺 $= (x-5)^2 \geqq 0$//

(2) 左辺 $= (x+3)^2+1 \geqq 1 > 0$//

110. (1) 左辺 $(x+y)^2+y^2 \geqq 0$. 等号は $x = -y, y = 0$, すなわち $x = y = 0$ のときに限り成り立つ.

(2) 左辺 $-$ 右辺 $= 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx = (x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)$

$= (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geqq 0$. よって左辺 $\geqq$ 右辺. 等号は $x = y = z$ のときに限り成り立つ.

111. $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}, A = \{2,4,6,8,10\}, B = \{4,5,6,7,8\}$

(1) $A \cap B = \{4,6,8\}$.

(2) $A \cup B = \{2,4,5,6,7,8,10\}$.

(3) $\overline{A \cap B} = \{1,2,3,5,7,9,10\}$.

(4) $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1,2,3,5,7,9,10\}$.

112. $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}, A = \{1,3,5,7,9\}$

(1) $A \cup B = \{1,2,3,5,7,9,10\}$. $\overline{A \cup B} = \{4,6,8\}$. よって $\overline{A \cap B} \cap C = \{4,8\}$.

(2) $A \cap B \cup \overline{C} = \overline{A \cap B \cap C}$. $A \cap B \cap C = \{5,7\}$. よって $A \cap B \cup \overline{C} = \{1,2,3,4,6,8,9,10\}$.

113. (1) 偽. 反例は $x = -4$. このとき $x^2 = 16 > 9$ であるが, $x < 3$. (これ以外の反例でもよい)

(2) $x^2 < 9 \Rightarrow x^2 - 9 < 0 \Rightarrow (x+3)(x-3) < 0 \Rightarrow -3 < x < 3 \Rightarrow x < 3$. よって真.

114. (1) $x = y = 0 \Rightarrow xy = 0, xy = 0 \not\Rightarrow x = y = 0$. よって必要条件.

(2) $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9, x^2 = 9 \not\Rightarrow x = 3$. よって十分条件.

(3) x, y 実数なので, $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$. よって必要十分条件.

(4) $x = 2, y = 1 \Rightarrow 2x + y = 5, 2x + y = 5 \not\Rightarrow x = 2, y = 1$. よって必要条件.

115. $\overline{p} =$「$n \leqq 4$」. $\overline{p}$ の真理集合 P は $P = \{1, 2, 3, 4\}$.

116. (1) $x \neq 0$ かつ $x \neq 1$.　(2) $x < 1$ または $x > 3$.

117. (1) 逆：$x + y > 0 \to x > 0$ かつ $y > 0$. 偽.　裏：$x \leqq 0$ または $y \leqq 0 \to x + y \leqq 0$. 偽.

対偶：$x + y \leqq 0 \to x \leqq 0$ または $y \leqq 0$. 真.

(2) 逆：$x > 0$ かつ $y > 0 \to xy > 0$. 真.　裏：$xy \leqq 0 \to x \leqq 0$ または $y \leqq 0$. 真.

対偶：$x \leqq 0$ または $y \leqq 0 \to xy \leqq 0$. 偽.

118. 対偶：「m が奇数かつ n が奇数ならば mn は奇数. 」を証明すればよい.

m が奇数かつ n が奇数ならば $m = 2k+1, n = 2l+1$ (k, l は整数) と表せる．よって

$mn = (2k+1)(2l+1) = 4kl = 2k = 2l + 1 = 2(2kl + k + l) + 1$.

$2kl + k + l$ は整数だから $2(2kl + k + l) + 1$ は奇数. よって mn は奇数.

従って対偶は証明された．よって元の命題「mn が偶数ならば m が偶数であるかまたは n が偶数である」は証明された//

p.22　CHECK

119. (1) $-2x < -14$. $x > 7$.　(2) $2(5x - 2) \geqq 3 \cdot 7x - 6$. $-11x \geqq -2$. $x \leqq \dfrac{2}{11}$.

120. 第 1 式より $4x > -8 \Rightarrow x > -2$. 第 2 式より $3x - 1 \geqq 10x + 6 \Rightarrow x \leqq -1$. よって $-2 < x \leqq -1$.

121. (1) $(x+1)(x-4) \leqq 0$. よって $-1 \leqq x \leqq 4$.　(2) $(x+1)(x-2) > 0$. よって $x < -1, x > 2$.

(3) $-2 \leqq x \leqq 1, x \geqq 3$.　(4) $x(x-1)(x-2) < 0$. よって $x < 0, 1 < x < 2$.

122. (1) $D = \{-2(m+2)\}^2 - 4 \cdot (-m) = 4m^2 + 20m + 16 = 4(m+1)(m+4) > 0$. よって $m < -4, m > -1$.

(2) $m = 0$ のとき $-2x = 0$ より $x = 0$ で解は 1 つだから $m \neq 0$. $D = (-2)^2 - 4m^2 = 4 - 4m^2 > 0$.

よって $m^2 - 1 = (m+1)(m-1) < 0$. $-1 < m < 1$. $m \neq 0$ より $-1 < m < 0, 0 < m < 1$.

123. (1) 左辺 $= (x - 2y)^2 + y^2 \geqq 0$. よって $x^2 - 4xy + 5y^2 \geqq 0$.

等号は $x - 2y = 0, y = 0$, すなわち $x = y = 0$ のときに限り成り立つ.

(2) 左辺 $-$ 右辺 $= a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2 = (a-1)^2 + (b-1)^2 \geqq 0$.

等号は $a - 1 = 0, b - 1 = 0$, すなわち $a = b = 1$ のときに限り成り立つ.

124. $x^2 < 4x + 12 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = (x+2)(x-6) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 6$. $x^2 + 5x \leqq 0 \Leftrightarrow x(x+5) \leqq 0 \Leftrightarrow -5 \leqq x \leqq 0$.

(1) $A \cap B = \{x | -2 < x \leqq 0\}$.　(2) $A \cup B = \{x | -5 \leqq x < 6\}$.

125. $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, \overline{B} = \{1, 3, 4, 7, 8, 10\}$.

(1) $A \cap \overline{B} = \{4, 8, 10\}$.　(2) $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$. よって $\overline{A \cup B} = \{1, 3, 7\}$.

126. (1) $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1, x^2 = 1 \not\Rightarrow x = 1$. よって $\boxed{\text{必要}}$条件.　(2) $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. よって $\boxed{\text{必要十分}}$条件.

(3) $a = b = 2 \Leftrightarrow ab = 4, ab = 4 \not\Rightarrow a = b = 2$. よって $\boxed{\text{十分}}$条件.

127. 逆：「$x = 1 \to (x-1)(x-2) = 0$」真, 裏：「$(x-1)(x-2) \neq 0 \to x \neq 1$」真, 対偶：「$x \neq 1 \to (x-1)(x-2) \neq 0$」偽