p.23. 2 章§ 2. 不等式　STEP UP

128. (1) $2x-5<x+3, x+3<3x+7$ より $x<8, -4<2x \Rightarrow -2<x$. よって $-2<x<8$.

(2) 第 1 式より $2x \geqq 3$. よって $x \geqq \dfrac{3}{2} \cdots$①. 第 2 式より $-3x>-7$. よって $x<\dfrac{7}{3} \cdots$②.

第 3 式より $-5x \geqq -21$. よって $x \leqq \dfrac{21}{5} \cdots$③. ①②③より $\dfrac{3}{2} \leqq x < \dfrac{7}{3}$.

129. (1) $(a^2+1)-(a-a^2) = 2a^2-a+1 = 2\left(a^2-\dfrac{1}{2}a\right)+1 = 2\left\{\left(a-\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{1}{16}\right\}+1 = 2\left(a-\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}+1$

$= 2\left(a-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8} \geqq \dfrac{7}{8} > 0$. よって $a^2+1>a-a^2$.

(2) $x^2+(a+1)x-a(a-1)(a^2+1) = x^2+(a+1)x+(-a^2+a)(a^2+1) = (x-a^2+a)(x+a^2+1)<0$.

(1) より $-(a^2+1) < -(a-a^2) = a^2-a$. よって $-(a^2+1)<x<a^2-a$.

130. $x^2-3x-(k+1)(k-2) = \{x-(k+1)\}(x+k-2) = 0$ より $x=k+1, -k+2$. よって $k+1<3, -k+2<3$. 従って $k<2, k>-1$. よって $-1<k<2$.

131. 1 次不等式より $k \neq 0$. $k>0$ のとき解は $x<k+3$. このとき k がどのような値でも解の集合は $x>2$ に含まれない.

$k<0$ のとき解は $x>k+3$. このとき解の集合が $x>2$ に含まれるのは $k+3 \geqq 2$ の場合である. よって $k \geqq -1$.

従って求める k の範囲は $-1 \leqq k < 0$.

132. (1) 面積 S が一定の長方形の 2 辺を x, y $(x>0, y>0)$ とすると $S = xy \cdots$①.

周囲の長さ l は $l=2(x+y)$ より $\dfrac{l}{4} = \dfrac{x+y}{2} \cdots$②. $x>0, y>0$ だから相加平均と相乗平均の関係より

$\dfrac{x+y}{2} \geqq \sqrt{xy}$. ①②より $l \geqq 4\sqrt{S}$. 等号は $x=y$ のときに限って成り立つから

l が最小となるのは正方形のときである.

(2) 周囲の長さ l が一定の長方形の 2 辺を x, y $(x>0, y>0)$ とすると $l=2(x+y)$ より $\dfrac{l}{4} = \dfrac{x+y}{2} \cdots$①.

面積 S は $S=xy \cdots$②. $x>0, y>0$ だから相加平均と相乗平均の関係より

$\dfrac{x+y}{2} \geqq \sqrt{xy}$. ①②より $\dfrac{l}{4} \geqq \sqrt{S}$. 等号は $x=y$ のときに限って成り立つから

S が最大となるのは正方形のときである.

133. (1) 第 1 式より $4x-4>3x-6 \Rightarrow x>-2 \cdots$①. 第 2 式より $(x+1)(x-1)>0 \Rightarrow x<-1, x>1 \cdots$②.

①②より $-2<x<-1, 1<x$.

(2) 第 1 式より $(x-1)(x-8) \leqq 0 \Rightarrow 1 \leqq x \leqq 8 \cdots$①. 第 2 式より $-\dfrac{1}{2}x<-3 \Rightarrow x>6 \cdots$②.

①②より $6<x \leqq 8$.

134. (1) $(x^2-x-2)^2>0$ だから, 両辺に (x^2-x-2) をかけて $(x-1)(x^2-x-2)>0 \Rightarrow (x-1)(x+1)(x-2)>0$.

よって $-1<x<1, 2<x$.

(2) $(x-1)^2(x+1)^2>0$ だから, 両辺に $(x-1)^2(x+1)^2$ をかけて $2(x-1)(x+1)^2 > (x-1)^2(x+1)$

$\Rightarrow 2(x-1)(x+1)^2-(x-1)^2(x+1) = (x-1)(x+1)\{2(x+1)-(x-1)\} = (x-1)(x+1)(x+3)>0$.

よって $-3<x<-1, 1<x$.

135. (1) $-3<x<3$.

(2) $-3<2x-3<3 \Rightarrow 0<2x<6 \Rightarrow 0<x<3$.

136. (1) (i) $x-7 \geqq 0$ 即ち $x \geqq 7$ のとき $|x-7|=x-7$ より $x-7>5x+2 \Rightarrow -4x>9 \Rightarrow x<-\dfrac{9}{4}$. $x \geqq 7$ より解なし.

(ii) $x-7<0$ 即ち $x<7$ のとき $|x-7|=-(x-7)$ より $-(x-7)>5x+2 \Rightarrow -6x>-5 \Rightarrow x<\dfrac{5}{6}$.

$x<7$ より $x<\dfrac{5}{6}$.

(i)(ii) より $x<\dfrac{5}{6}$.

(2) (i) $x \geqq 3$ のとき $x-2>0, x-3geqq0$ より $(x-2)+(x-3)>5 \Rightarrow 2x>10 \Rightarrow x>5$. $x \geqq 3$ より $x>5$.

(ii) $2 \leqq x<3$ のとき $x-2 \geqq 0, x-3<0$ より $(x-2)-(x-3)>5 \Rightarrow 1>5$. これは成り立たないから解なし

(iii) $x<2$ のとき $x-2<0, x-3<0$ より $-(x-2)-(x-3)>5 \Rightarrow -2x>0 \Rightarrow x<0$. $x<2$ より $x<0$.

(i)(ii)(iii) より $x<0, 5<x$.

137. (1) 左辺 $-$ 右辺 $=(x^2+1)(y^2+1)-(xy+1)^2=x^2y^2+x^2+y^2+1-(x^2y^2+2xy+1)=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2 \geqq 0$.

よって $(x^2+1)(y^2+1) \geqq (xy+1)^2$. 等号は $x=y$ のときに限り成り立つ.

(2) 左辺 $-$ 右辺 $=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2acxz+2bcyz)$

$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2+a^2z^2-2acxz+c^2x^2+b^2z^2-2bcyz+c^2y^2=(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2 \geqq 0$.

よって $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$. 等号は $ay=bx, az=bx, bz=cy$ のときに限り成り立つ.

(3) (i) $a \geqq 0, b \geqq 0$ のとき $|a|=a, |b|=b$ より $|a||b|=ab \geqq 0 \geqq -ab=-|a||b|$. よって成り立つ.

(ii) $a \geqq 0, b<0$ のとき $|a|=a, |b|=-b$ より $|a||b|=-ab \geqq 0 \geqq ab=-|a||b|$. よって成り立つ.

(iii) $a<0, b \geqq 0$ のとき $|a|=-a, |b|=b$ より $|a||b|=-ab \geqq 0 \geqq ab=-|a||b|$. よって成り立つ.

(iv) $a<0, b<0$ のとき $|a|=-a, |b|=-b$ より $|a||b|=ab>0>-ab=-|a||b|$. よって成り立つ.

以上により成り立つ.

(4) $\left||a|-|b|\right|^2=(|a|-|b|)^2=|a|^2-2|a||b|+|b|^2=a^2-2|a||b|+b^2$. $|a+b|^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

$(|a|+|b|)^2=|a|^2+2|a||b|+|b|^2=a^2+2|a||b|+b^2$. よって (3) より $\left||a|-|b|\right|^2 \leqq |a+b|^2 \leqq (|a|+|b|)^2$.

$\left||a|-|b|\right|, |a+b|, |a|+|b| \geqq 0$ より $\left||a|-|b|\right| \leqq |a+b| \leqq |a|+|b|$.

p.25　PLUS

138. (1) 第 1 式 $+$ 第 2 式より $x(x-y)+x(x+y)=2x^2=72$. よって $x^2=36, x=\pm 6$. 第 2 式より

$\pm 6(\pm 6+y)=36 \pm 6y=60$. よって $y=\pm 4$. $(x,y)=(6,4),(-6,-4)$.

(2) 第 1 式より $(x-3y)(x+2y)=0$. よって $x=3y, x=-2y$.

$x=3y$ のとき第 2 式より $(3y)^2-2y^2=7y^2=4$. よって $y=\pm\dfrac{2\sqrt{7}}{7}, x=\pm\dfrac{6\sqrt{7}}{7}$ (復号同順).

$x=-2y$ のとき第 2 式より $4y^2-2y^2=2y^2=4$. よって $y=\pm\sqrt{2}, x=\mp 2\sqrt{2}$ (復号同順).

(3) 第 2 式より $(x-y)(x+5y)=0$. よって $x=y, x=-5y$.

$x=y$ のとき第 1 式より $3y^2-5y^2+2y^2=0=17$. これは成り立たないから解なし.

$x=-5y$ のとき第 1 式より $75y^2+25y^2+2y^2=102y^2=17$. よって $y=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{6}, x=\mp\dfrac{5\sqrt{6}}{6}$ (復号同順).

(4) 第 1 式 $\times 4+$ 第 2 式 $\times 3$ より $8x^2-10xy-3y^2=(4x+y)(2x-3y)=0$. よって $4x=-y, 2x=3y$.

$4x=-y \Leftrightarrow y=-4x$ のとき第 1 式より $2x^2+4x^2=6x^2=12$. よって $x=\pm\sqrt{2}, y=\mp 4\sqrt{2}$ (復号同順).

$2x=3y \Leftrightarrow y=\dfrac{2}{3}x$ のとき第 1 式より $2x^2-\dfrac{2}{3}x^2=\dfrac{4}{3}x^2=12$. よって $x=\pm 3, y=\pm 2$ (復号同順).

(5) 第 1 式 $\times$ 第 2 式 $\times$ 第 3 式より $x^2y^2z^2=36$. よって $xyz=\pm 6\cdots$①.

①$\div$ 第 2 式, ①$\div$ 第 3 式, ①$\div$ 第 1 式よりそれぞれ $x=\pm 1, y=\pm 2, z=\pm 3$ (復号同順).

139. 木の本数を x とすると $nx=160\cdots$①, $(x-3)(n+2)=170\cdots$②. ② $-$ ① より $(nx+2x-3n-6)-nx=10$ $\Rightarrow 2x-3n-6=10 \Rightarrow x=\dfrac{3}{2}n+8$. ①に代入して $n\left(\dfrac{3}{2}n+8\right)=160 \Rightarrow 3n^2+16n-320=(3n+40)(n-8)$. よって $n=-\dfrac{40}{3}, 8$. $n>0$ より $n=8$.