大日本図書　新基礎数学問題集　3 章§ 1 STEP UP 詳しい解答

p.30. 3 章§ 1. 2 次関数　STEP UP

163. (1) x 軸 $(y=0)$ との共有点の x 座標は $x^2+4x-5=(x+5)(x-1)=0$ より $x=-5,1$. このどちらかが x 軸方向の並行移動によって原点に移ればよい. よって並行移動後の x 軸 $(y=0)$ との共有点の x 座標は $x=-6,0$ または $x=0,6$. よって求める放物線の方程式は $y=(x+6)x=x^2+6x$ または $y=x(x-6)=x^2-6x$.

(2) $y=(x+2)^2-9$. よって頂点は $(-2,-9)$. y 軸に関して対称に移動すると $(2,-9)$.

凹凸は変わらないから $y=(x-2)^2-9$.

(3) 頂点を原点に関して対称に移動すると $(2,9)$. 凹凸が逆 (上に凸) になるから $y=-(x-2)^2+9$.

164. x 軸に接するから頂点は x 軸上にある. それを $(p,0)$ とすると 2 次関数は $y=a(x-p)^2$.

2 点 $(-2,1),(2,9)$ を通るから $1=a(-2-p)^2=a(p+2)^2\cdots①, 9=a(2-p)^2=a(p-2)^2\cdots②$.

① − ② より $-8=a\{(p+2)^2-(p-2)^2\}=a\{(p+2)+(p-2)\}\{(p+2)-(p-2)\}=8ap$. よって $ap=-1$.

①より $p=ap(p+2)^2=-(p+2)^2=-p^2-4p-4$. よって $p^2+5p+4=(p+1)(p+4)=0$, すなわち $p=-1,-4$.

このときそれぞれ $a=-\dfrac{1}{p}=1,\dfrac{1}{4}$. よって求める 2 次関数は $y=(x+1)^2$ または $y=\dfrac{1}{4}(x+4)^2$.

165. 条件より $a<0$ で頂点は $\left(-\dfrac{3}{2},3\right)$. よって $y=ax^2-12x+b=a\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+3=ax^2+3ax+\dfrac{9}{4}a+3$.

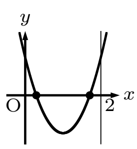
従って $-12=3a, b=\dfrac{9}{4}a+3$. よって $a=-4, b=-6$.

166. (1) $y=(x+m)^2-m^2-m$. よって $z=-m^2-m$.

(2) $z=-(m^2+m)=-\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$. よって z の最大値 $\dfrac{1}{4}$ $\left(m=-\dfrac{1}{2}\right)$.

167. (1) x 軸 $(y=0)$ との共有点の x 座標は $x^2-2(m-1)x-m=0$ の解である. $D=\{-2(m-1)\}^2-4(-m)$ $=4m^2-4m+4=(2m-1)^2+3\geqq 3>0$ より $y=x^2-2(m-1)x-m$ は x 軸と 2 点で交わる.

(2) (1) の 2 次方程式の解を α,β とすると交点は $(\alpha,0),(\beta,0)$. よって, その距離は $\sqrt{(\alpha-\beta)^2}$. 解と係数の関係より $\alpha+\beta=-\{-2(m-1)\}=2(m-1), \alpha\beta=-m$. よって $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$ $=4(m-1)^2-4(-m)=4m^2-4m+4=(2m-1)^2+3\geqq 3$. これが, すなわち 2 交点の距離が最小になるのは $m=\dfrac{1}{2}$ のときである.

168. 

2 次関数 $y=x^2+2mx+1=(x+m)^2-m^2+1$ は条件より図のようになる. よって頂点の座標から $0<-m<2\cdots①, -m^2+1<0\cdots②$. また $x=0,2$ のときそれぞれ $y>0$ だから $1>0, 4m+5>0\cdots③$.

①より $-2<m<0$.②より $m<-1, 1<m$. ③より $m>-\dfrac{5}{4}$. 以上により $-\dfrac{5}{4}<m<-1$.

169. $y=4-x$. よって $y\geqq 0$ より $4-x\geqq 0$, すなわち $x\leqq 4$. $x\geqq 0$ より $0\leqq x\leqq 4$. この範囲で

$3x^2+2y^2=3x^2+2(4-x)^2=5x^2-16x+32=5\left(x-\dfrac{8}{5}\right)^2+\dfrac{96}{5}$ の最大値・最小値を考えればよい.

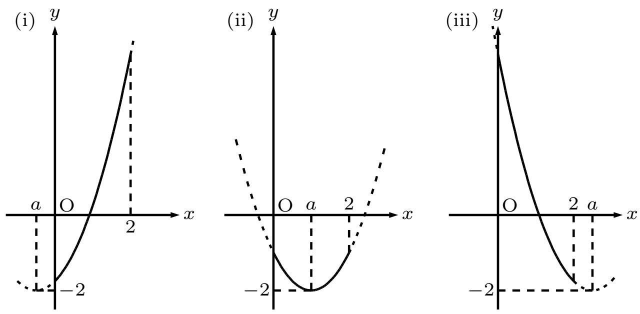
2 次関数の値が $x=0$ のとき 32, $x=4$ のとき 48. よって最大値 48 $((x,y)=(4,0))$, 最小値 $\dfrac{96}{5}$ $\left((x,y)=\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{12}{5}\right)\right)$.

170. $y = (x-a)^2 - 2$.

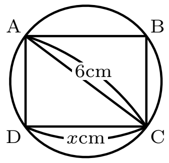
(i) $a < 0$ のとき $x = 0$ で最小. 最小値は $a^2 - 2$.

(ii) $0 \leqq a < 2$ のとき $x = a$ で最小. 最小値は -2.

(iii) $a > 2$ のとき $x = 2$ で最小. 最小値は $a^2 - 4a + 2$.



171.



図のように $DC = x\text{cm}$ とすると $AD^2 + x^2 = 6^2$ より $AD = \sqrt{36 - x^2}$. よって長方形 $ABCD$ の面積 S は $S = x\sqrt{36 - x^2}$. よって $S^2 = x^2(36 - x^2)$. $x^2 = X$ とおくと $S^2 = X(36 - X)$.
S^2 が最大のとき S も最大. $S^2 = -X^2 + 36X = -(X - 18)^2 - 18^2$ より $X = 18$ のとき S^2 は最大だから $x^2 = 18$, すなわち $x = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ のとき S は最大.

このとき, $AD = \sqrt{36 - x^2} = \sqrt{36 - 18} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} = x = DC$ だから 1 辺が $3\sqrt{2}\text{cm}$ の正方形のときに面積 S は最大である.