大日本図書　新基礎数学問題集　4 章 § 1 STEP UP 詳しい解答

p.41. 4 章 § 1. 指数関数　STEP UP

213. (1) $0.5^x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=(2^{-1})^x=2^{-x}$ だから $2^{-x}=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$. よって $-x=\dfrac{1}{2}$ より $x=-\dfrac{1}{2}$.

(2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=(2^{-1})^x=2^{-x}=X$ とおくと $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x=(2^{-2})^x=(2^{-x})^2=X^2$ より $X^2-\dfrac{9}{8}X+\dfrac{1}{8}=0$. よって $8X^2-9X+1=(8X-1)(X-1)=0$ より $X=2^{-x}=\dfrac{1}{8},1=2^{-3},2^0$. よって $-x=-3,0$ より $x=3,0$.

(3) $2^x=X$ とおくと $2^{2x-1}=2^{2x}\cdot 2^{-1}=(2^x)^2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}X^2$ より $\dfrac{1}{2}X^2+2X-6=0$. よって $X^2+4X-12=(X+6)(X-2)=0$ より $X=2^x=-6,2$. $2^x>0$ より $2^x=2$. よって $x=1$.

(4) $2^x=X$ とおくと $2^{2x+1}=2^{2x}\cdot 2^1=(2^x)^2\cdot 2=2X^2, 2^{x+4}=2^x\cdot 2^4=16X, 2^{3x}=(2^x)^3=X^3$ より $2X^2-5\cdot 16X+X^3=0$. よって $X^3+2X^2-80X=X(X+10)(X-8)=0$ より $X=2^x=0,-10,8$. $2^x>0$ より $2^x=8=2^3$. よって $x=3$.

214. (1) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{64}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2^6}}=\dfrac{1}{2^{\frac{6}{4}}}=2^{-\frac{3}{2}}, \dfrac{1}{4}=2^{-2}, \sqrt[5]{2^{-9}}=2^{-\frac{9}{5}}$. $y=2^x$ は単調増加だから $-2<-\dfrac{9}{5}<-\dfrac{7}{4}<-\dfrac{3}{2}$ より $2^{-2}<2^{-\frac{9}{5}}<2^{-\dfrac{7}{4}}<2^{-\frac{3}{2}}$. よって $\dfrac{1}{4}<\sqrt[5]{2^{-9}}<2^{-\frac{7}{4}}<\dfrac{1}{\sqrt[4]{64}}$.

(2) $3\sqrt[3]{3}=3^1\cdot 3^{\frac{1}{3}}=3^{1+\frac{1}{3}}=3^{\frac{4}{3}}, \sqrt[4]{243}=\sqrt[4]{3^5}=3^{\frac{5}{4}}, 3\sqrt[5]{9}=3\sqrt[5]{3^2}=3^1\cdot 3^{\frac{2}{5}}=3^{1+\frac{2}{5}}=3^{\frac{7}{5}}, 3\sqrt[6]{3}=3^1\cdot 3^{\frac{1}{6}}=3^{2+\frac{1}{6}}=3^{\frac{7}{6}}$. $y=3^x$ は単調増加だから $\dfrac{7}{6}<\dfrac{5}{4}<\dfrac{4}{3}<\dfrac{2}{5}$ より $3^{\frac{7}{6}}<3^{\frac{5}{4}}<3^{\frac{4}{3}}<3^{\frac{2}{5}}$. よって $3\sqrt[6]{3}<\sqrt[4]{243}<3\sqrt[3]{3}<3\sqrt[5]{9}$.

215. (1) $0.3^x>0.09=(0.3)^2$. $y=(0.3)^x$ は単調減少だから $x<2$.

(2) $2^x=X$ とおくと $2^{2x+3}=2^{2x}\cdot 2^3=(2^x)^2\cdot 8=8X^2$ だから $8X^2-33X+4=(8X-1)(X-4)<0$. よって $\dfrac{1}{8}<X<4$, すなわち $2^{-3}<2^x<2^2$. $y=2^x$ は単調増加だから $-3<x<2$.

216. $\dfrac{a^{4x}-a^{-4x}}{a^x-a^{-x}}=\dfrac{(a^x)^4-(a^x)^{-4}}{a^x-a^{-x}}=\dfrac{\{(a^x)^2\}^2-\{(a^x)^{-2}\}^2}{a^x-a^{-x}}=\dfrac{\{(a^x)^2+(a^x)^{-2}\}\{(a^x)^2-(a^x)^{-2}\}}{a^x-a^{-x}}$

$=\dfrac{(a^{2x}+a^{-2x})\{(a^x)^2-(a^{-x})^2\}}{a^x-a^{-x}}=\dfrac{(a^{2x}+a^{-2x})(a^x+a^{-x})(a^x-a^{-x})}{a^x-a^{-x}}=(a^{2x}+a^{-2x})(a^x+a^{-x})\cdots$①.

$a^{2x}=5$ より $a^{2x}+a^{-2x}=a^{2x}+\dfrac{1}{a^{2x}}=5+\dfrac{1}{5}=\dfrac{26}{5}\cdots$②.

$(a^x+a^{-x})^2=(a^x)^2+2a^x\cdot a^{-x}+(a^{-x})^2=a^{2x}+2a^{x-x}+a^{-2x}=a^{2x}+2a^0+\dfrac{1}{a^{2x}}=5+2+\dfrac{1}{5}=\dfrac{36}{5}$.

$a^x>0, a^{-x}>0$ より $a^x+a^{-x}>0$ だから $a^x+a^{-x}=\sqrt{\dfrac{36}{5}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\cdots$③. ①②③より

$\dfrac{a^{4x}-a^{-4x}}{a^x-a^{-x}}=\dfrac{26}{5}\cdot\dfrac{6\sqrt{5}}{5}=\dfrac{156\sqrt{5}}{25}$.

217. $27^x+27^{-x}=(3^3)^x+(3^3)^{-x}=(3^x)^3+(3^{-x})^3=(3^x+3^{-x})\{(3^x)^2-3^x\cdot 3^{-x}+(3^{-x})^2\}\cdots$①.

$3^x+3^{-x}=4\cdots$② より $(3^x)^2-3^x\cdot 3^{-x}+(3^{-x})^2=(3^x+3^{-x})^2-3\cdot 3^x\cdot 3^{-x}=4^2-3^{1+x-x}=16-3^1=13\cdots$③.

①②③より $27^x+27^{-x}=4\cdot 13=52$.

218. (1) $4^x+4^{-x}=(2^2)^x+(2^2)^{-x}=(2^x)^2+(2^{-x})^2=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}=t^2-2^{1+x-x}=t^2-2$. よって $f(x)=t^2-2-t+1=t^2-t-1$.

(2) $2^x>0, 2^{-x}>0$. 相加平均と相乗平均の関係より $t=2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x2^{-x}}=2\sqrt{2^{x-x}}=2$.

(3) (1) より $f(x)=t^2-t-1=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$. (2) より $t\geqq 2$ だから $t=2$ のとき $f(x)$ は最小. (2) より $t=2$ のとき $2^x=2^{-x}=\dfrac{1}{2^x}$, すなわち $2^{2x}=1$. よって $2x=0$ より $x=0$. よって $f(x)$ は $x=0$ のとき最小値 1 をとる.

219. $3^x = t$ とおくと $9^x = (3^2)^x = (3^x)^2 = t^2$. よって $y = -t^2 + 10t + 54 = -(t-5)^2 + 79$.

(1) $0 \leqq x \leqq 2$ のとき $3^0 \leqq 3^x \leqq 3^2$, すなわち $1 \leqq t \leqq 9$. $t = 1$ のとき $y = 63$, $t = 9$ のとき $y = 63$.

よって y は $t = 1, 9$ のとき最小値 63, $t = 5$ のとき最大値 79.

(2) $-2 \leqq x \leqq 0$ のとき $3^{-2} \leqq 3^x \leqq 3^0$, すなわち $\dfrac{1}{9} \leqq t \leqq 1$. $t = \dfrac{1}{9}$ のとき $y = \dfrac{4463}{81}$, $t = 1$ のとき $y = 63$.

よって y は $t = \dfrac{1}{9}$ のとき最小値 $\dfrac{4463}{81}$, $t = 1$ のとき最大値 63.