p.44. 4章§2. 対数関数　BASIC

220. $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1, \log_a MN = \log_a M + \log_a N, \log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N, \log_a M^n = n\log_a M$

(1) 与式 $= \log_2 2^7 = 7\log_2 2 = 7.$　(2) $\log_{\frac{1}{4}} 1 = 0.$　(3) 与式 $= \log_{0.1} 0.1^3 = 3\log_{0.1} 0.1 = 3.$

(4) 与式 $= \log_3 3^{-4} = -4\log_3 3 = -4.$　(5) 与式 $= \log_2 \dfrac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2\log_2 2 = -2.$

(6) $16 = 2^4$ より $16^{\frac{1}{4}} = 2$. よって $\log_{16} 2 = \dfrac{1}{4}.$　(7) 与式 $= \log_7 7^{\frac{1}{5}} = \dfrac{1}{5}\log_7 7 = \dfrac{1}{5}.$

(8) 与式 $= \log_2 2^{\frac{3}{5}} = \dfrac{3}{5}\log_2 2 = \dfrac{3}{5}.$

221. (1) 与式 $= \log_3 6 \times \dfrac{3}{2} = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2\log_3 3 = 2.$　(2) 与式 $= \log_2 \dfrac{12}{6} = \log_2 2 = 1.$

(3) 与式 $= \log_{10} \dfrac{\frac{75}{13}}{\frac{15}{26}} = \log_{10} \dfrac{75}{13} \times \dfrac{26}{15} = \log_{10} 10 = 1.$　(4) 与式 $= \log_2 \dfrac{56}{7} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3\log_2 2 = 3.$

(5) 与式 $= \log_2 54 - \log_2 12^3 = \log_2 \dfrac{54}{12^3} = \log_2 \dfrac{1}{32} = \log_2 2^{-5} = -5\log_2 2 = -5.$

(6) 与式 $= \log_4(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5}) = \log_4(7-5) = \log_4 2$. $4 = 2^2$ より $4^{\frac{1}{2}} = 2$. よって与式 $= \dfrac{1}{2}.$

222. (1) 左辺 $= \log_a N^{-\frac{1}{3}} = -\dfrac{1}{3}\log_a N =$ 右辺//　(2) 左辺 $= \log_a M^{\frac{m}{n}} = \dfrac{m}{n}\log_a M =$ 右辺//

(3) 左辺 $= \log_a LM \times MN \times NL = \log_a L^2M^2N^2 = \log_a (LMN)^2 = 2\log_a LMN =$ 右辺//

223. (1) 与式 $= \log_5 2^{\frac{1}{2}} + 3\log_5 \sqrt{2^3} = \dfrac{1}{2}\log_5 2 + 3\log_5 2^{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{2}\log_5 2 + \dfrac{9}{2}\log_5 2 = 5\log_5 2.$

(2) 与式 $= 2\log_2 2^2 \times 3 - 4 = 2(\log_2 2^2 + \log_2 3) - 4 = 2(2\log_2 2 + \log_2 3) - 4 = 2(2 + \log_2 3) - 4 = 2\log_2 3.$

(3) 与式 $= \log_4 \sqrt{\dfrac{6 \times 10}{15}} = \log_4 \sqrt{4} = \log_4 4^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log_4 4 = \dfrac{1}{2}.$

(4) 与式 $= \log_{10} 15^{\frac{1}{2}} + \log_{10} 8^{\frac{1}{3}} - \log_{10} 36^{\frac{1}{4}} = \log_{10}\sqrt{15} + \log_{10}(2^3)^{\frac{1}{3}} - \log_{10}(6^2)^{\frac{1}{4}} = \log_{10}\sqrt{15} + \log_{10} 2 - \log_{10} 6^{\frac{1}{2}}$

$= \log_{10} \dfrac{2\sqrt{15}}{\sqrt{6}} = \log_{10}\sqrt{10} = \log_{10} 10^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log_{10} 10 = \dfrac{1}{2}.$

(5) 与式 $= \log_3 \sqrt{5} + \log_3 6^{\frac{3}{2}} - \log_3 \sqrt{30} = \log_3 \sqrt{5} + \log_3 \sqrt{6^3} - \log_3 \sqrt{30} = \log_3 \sqrt{\dfrac{5 \times 6^3}{30}} = \log_3 \sqrt{6^2} = \log_3 6$

$= \log_3 3 \times 2 = \log_3 3 + \log_3 2 = 1 + \log_3 2.$

224. 底の変換公式 $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ $(a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1, c \neq 1)$

(1) 底の変換公式より左辺 $= \log_a b \cdot \dfrac{\log_a c}{\log_a b} \cdot \dfrac{\log_a d}{\log_a c} = \log_a d =$ 右辺//

(2) 左辺 $= \dfrac{1}{\frac{\log_a a}{\log_a ab}} = \dfrac{\log_a ab}{\log_a a} = \dfrac{\log_a a + \log_a b}{\log_a a} = 1 + \log_a b =$ 右辺//

(3) $x = a^{\log_c b}$ とおくと $\log_c x = \log_c a^{\log_c b} = (\log_c b)(\log_c a) = (\log_c a)(\log_c b) = \log_c b^{\log_c a}$. よって $x = b^{\log_c a}$.

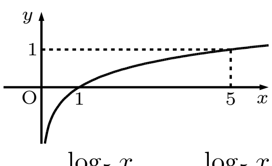
従って $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$//

225. (1) 与式 $= \dfrac{\log_3 27}{\log_3 8} \cdot \log_3 4 = \dfrac{\log_3 3^3}{\log_3 2^3} \cdot \log_3 2^2 = \dfrac{3\log_3 3}{3\log_3 2} \cdot 2\log_3 2 = 2.$

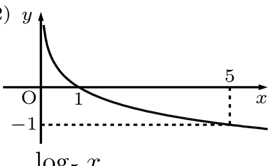
(2) 与式 $= \log_3 4 \cdot \dfrac{\log_3 125}{\log_3 8} \cdot \dfrac{\log_3 9}{\log_3 5} = \log_3 2^2 \cdot \dfrac{\log_3 5^3}{\log_3 2^3} \cdot \dfrac{\log_3 3^2}{\log_3 5} = 2\log_3 2 \cdot \dfrac{3\log_3 5}{3\log_3 2} \cdot \dfrac{2\log_3 3}{\log_3 5} = 4.$

(3) 与式 $= \log_2 \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\log_2 8}{\log_2 3} \cdot \dfrac{\log_2 27}{\log_2 9} = \log_2 3^{-1} \cdot \dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 3} \cdot \dfrac{\log_2 3^3}{\log_2 3^2} = -\log_2 3 \cdot \dfrac{3\log_2 2}{\log_2 3} \cdot \dfrac{3\log_2 3}{2\log_2 3} = -\dfrac{9}{2}.$

226. (1)



(2)



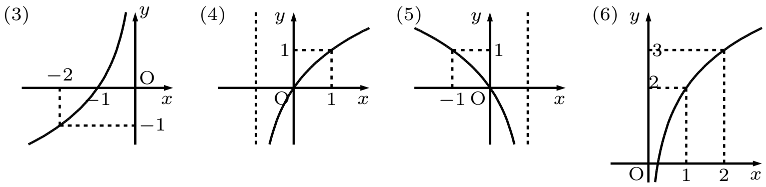
(2) $y = \dfrac{\log_5 x}{\log_5 \frac{1}{5}} = \dfrac{\log_5 x}{\log_5 5^{-1}} = \dfrac{\log_5 x}{-\log_5 5} = -\log_5 x$. よって $y = \log_5 x$ のグラフを x 軸に関して対称移動.

(3) $y = \dfrac{\log_2(-x)}{\log_2 \frac{1}{2}} = \dfrac{\log_2(-x)}{\log_2 2^{-1}} = \dfrac{\log_2(-x)}{-\log_2 2} = -\log_2(-x)$. よって $y = \log_2 x$ のグラフを原点に関して対称移動.

(4) $y = \log_2 x$ のグラフを x 軸方向に -1 平行移動.

(5) $y=\log_2\{-(x-1)\}$. よって $y=\log_2 x$ のグラフを y 軸に関して対称移動後, x 軸方向に 1 平行移動.

(6) $y=\log_2 x+\log_2 4=\log_2 x+2$. よって $y=\log_2 x$ のグラフを y 軸方向に 2 平行移動.



227. (1) $y=\log_5 x$ は単調増加より $\dfrac{1}{125}\leqq x<25\sqrt[3]{5}$ のとき $\log_5\dfrac{1}{125}\leqq y<\log_5 25\sqrt[3]{5}$.

$\log_5\dfrac{1}{125}=\log_5 5^{-3}=-3\log_5 5=-3, \log_5 25\sqrt[3]{5}=\log_5 5^2\cdot 5^{\frac{1}{3}}=2+\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{3}$. よって $-3\leqq y<\dfrac{7}{3}$.

(2) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ は単調減少より $\dfrac{1}{\sqrt{27}}<x<\sqrt[4]{27}$ のとき $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{\sqrt{27}}>y>\log_{\frac{1}{3}}\sqrt[4]{27}$.

$\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{\sqrt{27}}=\dfrac{\log_3\frac{1}{\sqrt{3^3}}}{\log_3\frac{1}{3}}=\dfrac{\log_3 3^{-\frac{3}{2}}}{\log_3 3^{-1}}=\dfrac{-\frac{3}{2}\log_3 3}{-\log_3 3}=\dfrac{3}{2}, \log_{\frac{1}{3}}\sqrt[4]{27}=\dfrac{\log_3\sqrt[4]{3^3}}{\log_3\frac{1}{3}}=\dfrac{\log_3 3^{\frac{3}{4}}}{\log_3 3^{-1}}=\dfrac{\frac{3}{4}\log_3 3}{-\log_3 3}=-\dfrac{3}{4}$.

よって $-\dfrac{3}{4}<y<\dfrac{3}{2}$.

228. (1) $y=\log_7 x$ は単調増加. $\sqrt{20}<2\sqrt{6}=\sqrt{24}<5=\sqrt{25}$ より $\log_7\sqrt{20}<\log_7 2\sqrt{6}<\log_7 5$.

(2) $y=\log_{\frac{1}{5}} x$ は単調減少. $0.3>\dfrac{2}{7}=0.285\cdots>\dfrac{1}{4}=0.25$ より $\log_{\frac{1}{5}} 0.3<\log_{\frac{1}{5}}\dfrac{2}{7}<\log_{\frac{1}{5}}\dfrac{1}{4}$.

229. (1) 真数は正だから $x>0\cdots$①. $\log_4 x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2$. ①より $x=2$.

(2) 真数は正だから $x-1>0, x>0$ より $x>1\cdots$①. $\log_2(x-1)+\log_2 x=\log_2(x-1)x, \log_2 2=1$ より

$\log_2(x-1)x=\log_2 2$. よって $(x-1)x=2$ より $x^2-x-2=(x-2)(x+1)=0$. 従って $x=2,-1$. ①より $x=2$.

(3) 真数は正だから $4x-7>0, x+1>0$ より $x>\dfrac{7}{4}\cdots$①. 与式より $\log_3(4x-7)+1=\log_3(x+1)$.

左辺 $=\log_3(4x-7)+\log_3 3=\log_3 3(4x-7)$. $\therefore\log_3 3(4x-7)=\log_3(x+1)$ より $3(4x-7)=x+1$.

よって $x=2$. ①より $x=2$.

(4) 真数は正だから $x-1>0, x-2>0$ より $x>2\cdots$①. 与式より $\log_{0.5}(x-1)+\log_{0.5}(x-2)+1=0$.

左辺 $=\log_{0.5}(x-1)+\log_{0.5}(x-2)+\log_{0.5}0.5=\log_{0.5}0.5(x-1)(x-2), \log_{0.5}1=0$.

$\therefore\log_{0.5}0.5(x-1)(x-2)=\log_{0.5}1$ より $0.5(x^2-3x+2)=1$. よって $x^2-3x+2=2$.

従って $x^2-3x=x(x-3)=0$ より $x=0,3$. ①より $x=3$.

230. (1) 真数は正だから $x+1>0$, すなわち $x>-1\cdots$①. $y=\log_3 x$ は単調増加. $\log_3(x+1)>2=2\log_3 3=\log_3 3^2$

より $x+1>3^2=9$. よって $x>8$. ①より $x>8$.

(2) 真数は正だから $x-1>0$, すなわち $x>1\cdots$①. $y=\log_2 x$ は単調増加. $\log_2(x-1)<3=3\log_2 2=\log_2 2^3$

より $x-1<2^3=8$. よって $x<9$. ①より $1<x<9$.

(3) 真数は正だから $2x-1>0$, すなわち $x>\dfrac{1}{2}\cdots$①. $\log_2 1=0, \log_2 2=1$. $y=\log_2 x$ は単調増加だから

$\log_2 1<\log_2(2x-1)<\log_2 2$ より $1<2x-1<2$. よって $2<2x<3$. 従って $1<x<\dfrac{3}{2}$. ①より $1<x<\dfrac{3}{2}$.

(4) 真数は正だから $x^2-1>0$ かつ $x+1>0$. よって $(x+1)(x-1)>0$ かつ $x>-1$.

従って $x<-1, 1<x$ かつ $x>-1$, すなわち $x>1\cdots$①.

$\log_{10}(x^2-1)<1+\log_{10}(x+1)=\log_{10}10+\log_{10}(x+1)=\log_{10}10(x+1)$. $y=\log_{10}x$ は単調増加だから

$x^2-1<10(x+1)$. よって $x^2-10x-11=(x-11)(x+1)<0$. 従って $-1<x<11$. ①より $1<x<11$.

231. (1) 与式 $=\log_{10}\dfrac{2}{10}=\log_{10}2-\log_{10}10=0.3010-1=-0.6990$.

(2) 与式 $=\log_{10}2^3\cdot 3=3\log_{10}2+\log_{10}3=3\times 0.3010+0.4771=1.3801$.

(3) 与式 $= \dfrac{\log_{10} 9}{\log_{10} 2} = \dfrac{\log_{10} 3^2}{\log_{10} 2} = \dfrac{2\log_{10} 3}{\log_{10} 2} = \dfrac{2 \times 0.4771}{0.3010} = 3.170.$

232. (1) 両辺の 10 を底とする対数をとると $\log_{10} 10^n \leqq \log_{10} 5^{10}$. よって $n\log_{10} 10 = n = 10\log_{10} 5$.

$\log_{10} 5 = \log_{10} \dfrac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - 0.3010 = 0.6990$ だから $n \leqq 10 \times 0.6990 = 6.990$. よって $n = 6$.

(2) 両辺の 10 を底とする対数をとると $\log_{10} 10^{-n} \geqq \log_{10} 3^{-20}$. よって $-n\log_{10} 10 = -n = -20\log_{10} 3$

$= -20 \times 0.4771 = -9.542$. 従って $n \leqq 9.542$ より $n = 9$.

233. x 時間後に 100 倍を超えるとすると $1.5^x > 100$. 両辺の 10 を底とする対数をとると $\log_{10} 1.5^x > \log_{10} 100$.

$\log_{10} 1.5^x = x\log_{10} 1.5 = x\log_{10} \dfrac{3}{2} = x(\log_{10} 3 - \log_{10} 2) = x(0.4771 - 0.3010) = 0.1761x$.

$\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2\log_{10} 10 = 2$. よって $0.1761x > 2$. 従って $x > \dfrac{2}{0.1761} = 11.357\cdots$. よって 12 時間後.

p.46 CHECK

234. (1) $\log_5 x = 3\log_5 5 = \log_5 5^3$. よって $x = 5^3 = 125$.

(2) $\log_{10} x = -2\log_{10} 10 = \log_{10} 10^{-2}$. よって $x = 10^{-2} = \dfrac{1}{100}$.

(3) $\log_x \dfrac{1}{5} = -\dfrac{1}{2}\log_x x = \log_x x^{-\frac{1}{2}}$. よって $x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{5}$. 従って $x = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2} = (5^{-1})^{-2} = 5^2 = 25$.

(4) $\log_x \dfrac{1}{16} = -\dfrac{4}{3}\log_x x = \log_x x^{-\frac{4}{3}}$. よって $x^{-\frac{4}{3}} = \dfrac{1}{16}$. 従って $x = \left(\dfrac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}} = (2^{-4})^{-\frac{3}{4}} = 2^3 = 8$.

235. (1) 与式 $= \log_6 6^2 \cdot 2 + \log_6 6^2 \cdot 3 = \log_6 6^2 \cdot 2 \times 6^2 \cdot 3 = \log_6 6^5 = 5\log_6 6 = 5$.

(2) 与式 $= \log_3 \dfrac{486}{6} = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4\log_3 3 = 4$.

(3) 与式 $= \log_2 288 - \log_2 6^2 = \log_2 \dfrac{288}{6^2} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3\log_2 2 = 3$.

236. (1) 与式 $= \log_2 \sqrt{10}^3 + \log_2 \dfrac{4}{5\sqrt{5}} = \log_2 \dfrac{10\sqrt{10} \times 4}{5\sqrt{5}} = \log_2 8\sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{7}{2}} = \dfrac{7}{2}\log_2 2 = \dfrac{7}{2}$.

(2) 与式 $= \log_3 \dfrac{\sqrt{6} \times \sqrt{90}}{\sqrt{20}} = \log_3 \sqrt{27} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{2}\log_3 3 = \dfrac{3}{2}$.

(3) 与式 $= \log_5 15^{\frac{1}{2}} + \log_5 \sqrt[3]{5^2} - \log_5 \sqrt{3} = \log_5 \dfrac{\sqrt{15} \times \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt{3}} = \log_5 \sqrt{5}\sqrt[3]{5^2} = \log_5 5^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} = \dfrac{7}{6}\log_5 5 = \dfrac{7}{6}$.

237. (1) 与式 $= \dfrac{\log_5 \sqrt[4]{125}}{\log_5 \sqrt{5}} = \dfrac{\log_5 \sqrt[4]{5^3}}{\log_5 \sqrt{5}} == \dfrac{\log_5 5^{\frac{3}{4}}}{\log_5 5^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\frac{3}{4}\log_5 5}{\frac{1}{2}\log_5 5} = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2}$.

(2) 与式 $= \log_2 3^{-1} \cdot \dfrac{\log_2 4}{\log_2 3} = -\log_2 3 \cdot \dfrac{\log_2 2^2}{\log_2 3} = -2\log_2 2 = -2$.

(3) 与式 $= \dfrac{\log_3 3}{\log_3 \sqrt{5}} \cdot \dfrac{\log_3 25}{\log_3 27} = \dfrac{\log_3 3}{\log_3 5^{\frac{1}{2}}} \cdot \dfrac{\log_3 5^2}{\log_3 3^3} = \dfrac{\log_3 3}{\frac{1}{2}\log_3 5} \cdot \dfrac{2\log_3 5}{3\log_3 3} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$.

(4) 与式 $= \dfrac{\log_2 7}{\log_2 8} \cdot \dfrac{\log_2 6}{\log_2 7} \cdot \dfrac{\log_2 5}{\log_2 6} \cdot \dfrac{\log_2 4}{\log_2 5} \cdot \dfrac{\log_2 3}{\log_2 4} \cdot \dfrac{\log_2 2}{\log_2 3} = \dfrac{\log_2 2}{\log_2 8} = \dfrac{\log_2 2}{\log_2 2^3} = \dfrac{\log_2 2}{3\log_2 2} = \dfrac{1}{3}$.

238. (1) $y = \log_2 x$ のグラフを x 軸方向に 2, y 軸方向に 1 平行移動.

(2) $y = \log_2\{-(x+1)\}$. $y = \log_2 x$ のグラフを y 軸に関して対称移動後, x 軸方向に -1 平行移動.

(3) $y = \log_2 x$ のグラフを x 軸に関して対称移動後, x 軸方向に -1 平行移動.

(4) $y = -\log_2\{-(x-1)\}$. $y = \log_2 x$ のグラフを原点に関して対称移動後, x 軸方向に 1 平行移動.

239. (1) 真数は正だから $2x - 1 > 0, x > 0$. よって $x > \dfrac{1}{2}\cdots$①. $\log_3(2x-1) = \log_3 x^2$ より $2x - 1 = x^2$.

よって $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0$ より $x = 1$. ①より $x = 1$.

(2) 真数は正だから $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) > 0, x - 2 > 0$. よって $x < -1, x > 2$ かつ $x > 2$, すなわち $x > 2\cdots$①.

$\log_5(x^2 - x - 2) = \log_5(x-2) + 2 = \log_5(x-2) + \log_5 5^2 = \log_5 25(x-2)$. よって $x^2 - x - 2 = 25x - 50$.

$x^2 - 26x + 48 = (x-2)(x-24) = 0$ より $x = 2, 24$. ①より $x = 24$.

(3) 真数は正だから $x+2>0, x>0$. よって $x>0\cdots$①. $\log_{10}(x+2)=\log_{10}\sqrt{x}+\log_{10}3=\log_{10}3\sqrt{x}$.

よって $x+2=3\sqrt{x}$ より $(x+2)^2=9x$. 従って $x^2+4x+4-9x=x^2-5x+4=(x-1)(x-4)=0$ より $x=1,4$.

①より $x=1,4$.

240. (1) 真数は正だから $x-2>0$. よって $x>2\cdots$①. $\log_8(x-2)<\dfrac{4}{3}\log_8 8=\log_8 8^{\frac{4}{3}}$. $y=\log_8 x$ は単調増加だから

$x-2<8^{\frac{4}{3}}=(2^3)^{\frac{4}{3}}=2^4=16$. よって $x<18$. ①より $2<x<18$.

(2) 真数は正だから $x+1>0$. よって $x>-1\cdots$①. $\log_{\frac{1}{3}}(x+1)>-\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{3}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}=\log_{\frac{1}{3}}3$.

$\log_{\frac{1}{3}}x$ は単調減少だから $x+1<3$. よって $x<2$. ①より $-1<x<2$.

241. (1) 与式 $=\log_{10}(2\times 3)=\log_{10}2+\log_{10}3=a+b$.

(2) 与式 $=\log_{10}\dfrac{10}{2}=\log_{10}10-\log_{10}2=1-a$.

(3) (2) より与式 $=\dfrac{\log_{10}3}{\log_{10}5}=\dfrac{b}{1-a}$.

(4) 与式 $=\dfrac{\log_{10}8}{\log_{10}3}=\dfrac{\log_{10}2^3}{\log_{10}3}=\dfrac{3\log_{10}2}{\log_{10}3}=\dfrac{3a}{b}$.

(5) 与式 $=\log_{10}\dfrac{3}{10}=\log_{10}3-\log_{10}10=b-1$.

(6) 与式 $=\dfrac{\log_{10}4}{\log_{10}9}=\dfrac{\log_{10}2^2}{\log_{10}3^2}=\dfrac{2\log_{10}2}{2\log_{10}3}=\dfrac{2a}{2b}=\dfrac{a}{b}$.