p.47. 4 章§ 2. 対数関数　STEP UP

242. (1) 真数は正だから $x+1>0, (x+2)^2>0$ より $x>-1\cdots$①.

$\log_{\frac{1}{2}}(x+1)=2\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}+\log_{\frac{1}{2}}(x+2)^2=\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\log_{\frac{1}{2}}(x+2)^2=\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2(x+2)^2$.

よって $x+1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2(x+2)^2=\dfrac{1}{4}(x^2+4x+4)$ より $x^2=0$, すなわち $x=0$. ①より $x=0$.

(2) 真数は正だから $x>0, 8x^4>0$. よって $x>0\cdots$①. $\log_2 x=X$ とおくと $\log_2 8x^4=\log_2 8+\log_2 x^4$

$=\log_2 2^3+4\log_2 x=3\log_2 2+4X=3+4X$. よって $X^2+4X+3=(X+1)(X+3)=0$ より $X=-1,-3$.

従って $\log_2 x=-1,-3$ より $x=2^{-1},2^{-3}=\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{8}$. ①より $x=\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{8}$.

243. (1) 真数は正だから $x-2>0, 4-x>0$ より $2<x<4\cdots$①. $y=\log_{0.1}x$ は単調減少だから $x-2<4-x$.

よって $2x<6$ より $x<3$. ①より $2<x<3$.

(2) 真数は正だから $x>0, x+2>0$ より $x>0\cdots$①. $\log_{\frac{1}{2}}x>\log_{\frac{1}{2}}(x+2)+\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}(x+2)$.

$y=\log_{\frac{1}{2}}x$ は単調減少だから $x<\dfrac{1}{2}(x+2)$ より $2x<x+2$. よって $x<2$. ①より $0<x<2$.

(3) 真数は正だから $x>0, x^2>0$ より $x>0\cdots$①. $\log_{\frac{1}{2}}x=X$ とおくと $X^2>\log_{\frac{1}{2}}x^2=2\log_{\frac{1}{2}}x=2X$.

よって $X^2-2X=X(X-2)>0$ より $X<0, 2<X$. 従って $\log_{\frac{1}{2}}x<0, 2<\log_{\frac{1}{2}}x$.

$y=\log_{\frac{1}{2}}x$ は単調減少だから $x>\left(\dfrac{1}{2}\right)^0=1, \left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}>x$. ①より $0<x<\dfrac{1}{4}, 1<x$.

244. (1) 真数は正だから $2(x-1)^2>0, -3x+5>0$ より $x<\dfrac{5}{3}$ かつ $x\neq 1\cdots$①.

$\log_3 2(x-1)^2=2\cdot\dfrac{\log_3(-3x+5)}{\log_3 9}=\dfrac{2\log_3(-3x+5)}{\log_3 3^2}=\dfrac{2\log_3(-3x+5)}{2\log_3 3}=\log_3(-3x+5)$. よって

$2(x-1)^2=-3x+5$ より $2x^2-x-3=(2x-3)(x+1)=0$. 従って $x=\dfrac{3}{2},-1$. ①より $x=\dfrac{3}{2},-1$.

(2) 真数は正だから $2-x>0, x+2>0$ より $-2<x<2\cdots$①. $\log_{\sqrt{2}}(2-x)=\log_2(x+2)+2$.

$\log_{\sqrt{2}}(2-x)=\dfrac{\log_2(2-x)}{\log_2\sqrt{2}}=\dfrac{\log_2(2-x)}{\log_2 2^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{\log_2(2-x)}{\frac{1}{2}\log_2 2}=2\log_2(2-x)=\log_2(2-x)^2$,

$\log_2(x+2)+2=\log_2(x+2)+2\log_2 2=\log_2(x+2)+\log_2 4=\log_2 4(x+2)$ より $\log_2(2-x)^2=\log_2 4(x+2)$.

よって $(2-x)^2=4(x+2)$ より $x^2-8x-4=0$. 従って $x=\dfrac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot(-4)}}{2}=4\pm2\sqrt{5}$. ①より $x=4-2\sqrt{5}$.

(3) x は真数であり, 底だから $x>0$ かつ $x\neq 1\cdots$①. $\log_x 4=\dfrac{\log_2 4}{\log_2 x}=\dfrac{\log_2 2^2}{\log_2 x}=\dfrac{2\log_2 2}{\log_2 x}=\dfrac{2}{\log_2 x}$.

よって $\log_2 x=X$ とおくと $X+\dfrac{2}{X}=3$ より $X^2-3X+2=(X-1)(X-2)=0$. 従って $X=1,2$.

よって $\log_2 x=1,2$ より $x=2^1,2^2=2,4$. ①より $x=2,4$.

245. (1) 常用対数 (10 を底とする対数) をとると $\log_{10}2^{50}=50\log_{10}2=50\times0.3010=15.05$.

よって $15<\log_{10}2^{50}<16$, すなわち $10^{15}<2^{50}<10^{16}$ より 2^{50} は 16 桁の整数である.

(2) 常用対数をとると $\log_{10}6^{20}=20\log_{10}6=20\log_{10}(2\times3)=20(\log_{10}2+\log_{10}3)=20\times(0.3010+0.4771)=15.562$.

よって $15<\log_{10}6^{20}<16$, すなわち $10^{15}<6^{20}<10^{16}$ より 6^{20} は 16 桁の整数である.

246. (1) 常用対数をとると $\log_{10}2^n<\log_{10}3^{13}<\log_{10}2^{n+1}$. よって $n\log_{10}2<13\log_{10}3<(n+1)\log_{10}2$.

$\log_{10}2>0$ より $n<\dfrac{13\log_{10}3}{\log_{10}2}<n+1$. $\dfrac{13\log_{10}3}{\log_{10}2}=\dfrac{13\times0.4771}{0.3010}=20.60\cdots$ より $n=20$.

(2) 常用対数をとると $\log_{10} 10^{-5} < \log_{10}\left(\frac{8}{10}\right)^n < \log_{10} 10^{-4}$. $\log_{10} 10^{-5} = -5\log_{10} 10 = -5$,
$\log_{10}\left(\frac{8}{10}\right)^n = n\log_{10}\frac{8}{10} = n(\log_{10} 8 - \log_{10} 10) = n(\log_{10} 2^3 - 1) = n(3\log_{10} 2 - 1) = n(3 \times 0.3010 - 1)$
$= -0.097n, \log_{10} 10^{-4} = -4\log_{10} 10 = -4$ だから $-5 < -0.097n < -4$. よって $\frac{5}{0.097} > n > \frac{4}{0.097}$.
$\frac{5}{0.097} = 51.54\cdots, \frac{4}{0.097} = 41.23\cdots$ より $42 \leqq n \leqq 51$, すなわち $n = 42, 43, \cdots, 51$.

p.49　PLUS

247. 学生 1 人について 1 から 25 のどのクラスに在籍しているかの 25 通りの情報を記録する. 学生 1000 人が 25 通りずつだから 25^{1000} 通りの情報を記録することになる. これを n バイトの記憶素子で記録するとすれば $2^{8n} \geqq 25^{1000}$.
よって $\log_{10} 2^{8n} = 8n\log_{10} 2 \geqq \log_{10} 25^{1000} = 1000\log_{10} 25 = 1000\log_{10}(2.5 \times 10) = 1000(\log_{10} 2.5 + \log_{10} 10)$
$= 1000(\log_{10} 2,5 + 1)$. 従って $n \geqq \frac{1000(\log_{10} 2.5 + 1)}{8\log_{10} 2} = \frac{1000(0.3979 + 1)}{8 \times 0.3010} = 580.52\cdots$. $n = 581$(バイト).

248. 1 等星の明るさを I_1, 6 等星の明るさを I_6 とすると $1 = c - 2.5\log_{10} I_1, 6 = c - 2.5\log_{10} I_6$.
よって $\log_{10} I_1 = \frac{c-1}{2.5}, \log_{10} I_6 = \frac{c-6}{2.5}$ だから $\log_{10}\frac{I_1}{I_6} = \log_{10} I_1 - \log_{10} I_6 = \frac{c-1}{2.5} - \frac{c-6}{2.5}$
$= \frac{(c-1)-(c-6)}{2.5} = 2$. よって $\frac{I_1}{I_6} = 10^2 = 100$. 従って 1 等星は 6 等星の 100 倍明るい.