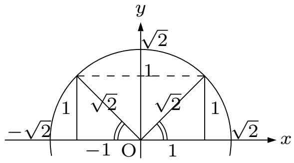
p.54. 5 章§ 1. 三角比とその応用　STEP UP

273. 解答参照

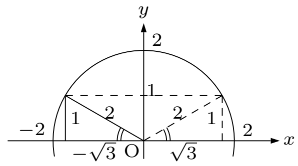
274. (1) α が鋭角のとき $r=\sqrt{2}, Y=1$ とすると $X=1$. $\alpha=45°$.



α が鈍角のとき $180°-\alpha$ は鋭角で $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

よって $180°-\alpha=45°$. $\alpha=180°-45°=135°$.

(2) $\cos\alpha<0$ より α は鈍角. よって $180°-\alpha$ は鋭角で



$\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $r=2, X=\sqrt{3}$ とすると

$Y=1$. $180°-\alpha=30°$. よって $\alpha=180°-30°=150°$.

(3) $\tan\alpha>0$ より α は鋭角. $X=1, Y=\sqrt{3}$ とすると $r=2$. $\alpha=60°$.

275. $\angle ACD=\angle ADC$ より $\angle ACD=\angle ADC=(180°-36°)\div 2=72°$. よって $\triangle ACD \backsim \triangle DBC$.

従って $\angle BDC=\angle ADB=36°$. $CD=x$ とおくと $AB=BD=x, BC=1-x$ となる. 相似比より

$AD:CD=CD:BC$ だから $1:x=x:(1-x)$. よって $x^2=1-x$ より $x^2+x-1=0$. 2 次方程式の解の公式より

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. $x>0$ より $CD=x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

D から AC に垂線を引きその足を H とすると $CH=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1-x}{2}$. よって

$AH=AC-CH=1-\dfrac{1-x}{2}=\dfrac{1+x}{2}=\dfrac{1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. 従って $\cos 36°=\dfrac{AH}{AD}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

276. (1) $AB=BC=100(\mathrm{cm})$ より $AC^2=AB^2+BC^2=100^2+100^2=20000$. $AC=\sqrt{20000}=100\sqrt{2}$. よって

$AH=\dfrac{AC}{2}=50\sqrt{2}$. $OH=90$ より $\tan\alpha=\dfrac{90}{50\sqrt{2}}=\dfrac{9\sqrt{2}}{10}\fallingdotseq\dfrac{9\times1.4142}{10}=1.27278$.

よって巻末の三角関数表より $\alpha\fallingdotseq 52°$.

(2) $CM=\dfrac{1}{2}BC=50$. $\triangle CMH$ は直角二等辺三角形になるから $HM=CM=50$. よって $\tan\beta=\dfrac{90}{50}=1.8$.

よって巻末の三角関数表より $\beta\fallingdotseq 61°$.

(3) $OM^2=OH^2+HM^2=90^2+50^2=10600$. $OM=\sqrt{10600}=10\sqrt{106}$. よって $\tan\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{50}{10\sqrt{106}}=0.4856\cdots$.

よって巻末の三角関数表より $\dfrac{\gamma}{2}\fallingdotseq 26°$. $\gamma\fallingdotseq 52°$.

277. 三角形の面積の公式より $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C\cdots$①. 正弦定理より $\dfrac{c}{\sin C}=2R\cdots$② だから $\sin C=\dfrac{c}{2R}$. よって①より

$S=\dfrac{1}{2}ab\cdot\dfrac{c}{2R}=\dfrac{abc}{4R}$.

②と同様にして $\sin A=\dfrac{a}{2R}, \sin B=\dfrac{b}{2R}$ だから $\dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=\dfrac{a^2\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R}}{2\cdot\frac{a}{2R}}=\dfrac{abc}{4R}$.

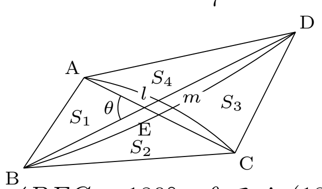
以上により $S=\dfrac{abc}{4R}=\dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$.

278. 余弦定理より $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{5^2+7^2-8^2}{2\cdot5\cdot7}=\dfrac{10}{2\cdot5\cdot7}=\dfrac{1}{7}$. $\cos^2 A+\sin^2 A=1$ より

$\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\left(\dfrac{1}{7}\right)^2=\dfrac{48}{49}$. $\sin A>0$ より $\sin A=\dfrac{\sqrt{48}}{7}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$. 正弦定理より

$2R=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{8}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}=\dfrac{14}{\sqrt{3}}=\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$. よって $R=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$.

279.



対角線 AC と BD の交点を E, $\angle AEB=\theta$ とする. 4 つの三角形 $\triangle ABE, \triangle BCE,$ $\triangle CDE, \triangle ADE$ の面積をそれぞれ S_1, S_2, S_3, S_4 とする. 四角形 $ABCD$ の面積 S は $S=S_1+S_2+S_3+S_4\cdots$① である. $S_1=\dfrac{1}{2}AE\cdot BE\sin\theta\cdots$②.

$\angle BEC=180°-\theta$ で $\sin(180°-\theta)=\sin\theta$ より $S_2=\dfrac{1}{2}BE\cdot CE\sin\theta\cdots$③. 同様にして $S_4=\dfrac{1}{2}AE\cdot DE\sin\theta\cdots$④.

$\angle CED = \angle AEB = \theta$ より $S_3 = \dfrac{1}{2}CE \cdot DE \sin\theta \cdots$⑤. ①〜⑤より

$S = \dfrac{1}{2}AE \cdot BE \sin\theta + \dfrac{1}{2}BE \cdot CE \sin\theta + \dfrac{1}{2}CE \cdot DE \sin\theta + \dfrac{1}{2}AE \cdot DE \sin\theta$

$= \dfrac{1}{2}(AE \cdot BE + BE \cdot CE + CE \cdot DE + AE \cdot DE)\sin\theta = \dfrac{1}{2}\{(AE + CE) \cdot BE + (CE + AE) \cdot DE\}\sin\theta$

$= \dfrac{1}{2}(AE + CE) \cdot (BE + DE)\sin\theta$. $AE + CE = l, BE + DE = m$ だから $S = \dfrac{1}{2}lm\sin\theta$.

280. (1) $AD = BC = 10$. $\triangle ABD$ にヘロンの公式を用いれば $s = \dfrac{7+10+13}{2} = 15$ より

面積は $\sqrt{15(15-7)(15-10)(15-13)} = \sqrt{15 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2} = 20\sqrt{3}$.

平行四辺形 $ABCD$ の面積は $\triangle ABD$ の面積の 2 倍だから $20\sqrt{3} \times 2 = 40\sqrt{3}$.

(2) $\triangle ABC$ にヘロンの公式を用いれば $s = \dfrac{4+7+9}{2} = 10$ より

面積は $\sqrt{10(10-4)(10-7)(10-9)} = \sqrt{10 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 1} = 6\sqrt{5}$.

$\triangle ACD$ にヘロンの公式を用いれば $s = \dfrac{7+8+3}{2} = 9$ より

面積は $\sqrt{9(9-7)(9-8)(9-3)} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6} = 6\sqrt{3}$.

平行四辺形 $ABCD$ の面積は $\triangle ABC$ の面積と $\triangle ACD$ の面積の和だから $6\sqrt{5} + 6\sqrt{3} = 6(\sqrt{5} + \sqrt{3})$.

(3) 279 の公式より $\dfrac{1}{2} \times 10 \times 12 \sin 60^\circ = 60 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}$.

281. (1) 余弦定理より $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. よって

左辺 $= 2bc \cdot \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + 2ca \cdot \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} + 2ab \cdot \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = (b^2+c^2-a^2) + (c^2+a^2-b^2) + (a^2+b^2-c^2)$

$= a^2 + b^2 + c^2 =$ 右辺.

(2) 正弦定理より $\sin A = \dfrac{a}{2R}, \sin B = \dfrac{b}{2R}$. よって左辺 $= \dfrac{\frac{a}{2R} - \frac{b}{2R}}{\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R}} = \dfrac{a-b}{a+b} =$ 右辺.

(3) 正弦定理, 余弦定理より左辺 $= \dfrac{a}{2R} \cdot \left(a - c \cdot \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right) = \dfrac{a}{2R} \cdot \dfrac{2a^2 - (c^2+a^2-b^2)}{2a} = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{4R}$.

$a = \dfrac{c\sin A}{\sin C} = \dfrac{2\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \dfrac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$.

右辺 $= \dfrac{b}{2R} \cdot \left(b - c \cdot \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = \dfrac{b}{2R} \cdot \dfrac{2b^2 - (b^2+c^2-a^2)}{2b} = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{4R}$. よって左辺 $=$ 右辺.

282. (1) 正弦定理より $\sin B = \dfrac{b}{2R}, \sin C = \dfrac{c}{2R}$. よって条件式より $\dfrac{b^2}{2R} = \dfrac{c^2}{2R} \Rightarrow b^2 = c^2$. $b > 0, c > 0$ より $b = c$.

よって $b = c$ の二等辺三角形.

(2) 余弦定理より $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$. よって条件式より

$a \times \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = b \times \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + c$. 従って $\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2c} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c} + c$.

$c^2 + a^2 - b^2 = b^2 + c^2 - a^2 + 2c^2$. $2a^2 - 2b^2 - 2c^2 = 0$ より $a^2 = b^2 + c^2$. よって a を斜辺とする直角三角形.

(3) 条件式より $a\tan B = b\tan A$. 相互関係より $\dfrac{a\sin B}{\cos B} = \dfrac{b\sin A}{\cos A}$. 正弦定理より $\sin A = \dfrac{a}{2R}, \sin B = \dfrac{b}{2R}$. よって

$\dfrac{ab}{2R\cos B} = \dfrac{ab}{2R\cos A}$. よって $\cos A = \cos B$. 従って $A = B$. $a = b$ の二等辺三角形.