p.71. 6 章§ 1. 点と直線　STEP UP

372. 3 頂点を $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ とするとその中点は $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right), \left(\dfrac{x_2+x_3}{2}, \dfrac{y_2+y_3}{2}\right), \left(\dfrac{x_3+x_1}{2}, \dfrac{y_3+y_1}{2}\right)$
だから $\dfrac{x_1+x_2}{2} = 3\cdots$①, $\dfrac{y_1+y_2}{2} = 2\cdots$②, $\dfrac{x_2+x_3}{2} = 6\cdots$③, $\dfrac{y_2+y_3}{2} = 1\cdots$④, $\dfrac{x_3+x_1}{2} = 5\cdots$⑤,
$\dfrac{y_3+y_1}{2} = 0\cdots$⑥. ①+⑤−③ より $x_1 = 2$. ②+⑥−④ より $y_1 = 1$. ①,⑤,②,⑥より $x_2 = 4, x_3 = 8, y_2 = 3, y_3 = -1$.
よって 3 頂点は $(2, 1), (4, 3), (8, -1)$.

373. 直線 CA の傾き $\dfrac{5-4}{5-2k-1} = \dfrac{1}{4-2k}$ と直線 CB の傾き $\dfrac{k-4}{3-1} = \dfrac{k-4}{2}$ が一致すればよいから $\dfrac{1}{4-2k} = \dfrac{k-4}{2}$.
よって $2 = (k-4)(4-2k) = -2k^2+12k-16, 2k^2-12k+18 = 2(k-3)^2 = 0$. 従って $k = 3$.

374. 点 A, B が x 軸上に, 特に中点 M が原点に来るように回転・平行移動すると $\mathrm{A}(a, 0)$, $\mathrm{B}(-a, 0)$, $\mathrm{C}(b, c)$, $\mathrm{M}(0, 0)$ とおくことができる. すると

左辺 $= \sqrt{(b-a)^2+(c-0)^2}^2 + \sqrt{\{b-(-a)\}^2+(c-0)^2}^2 = b^2-2ab+a^2+c^2+b^2+2ab+a^2+c^2 = 2(a^2+b^2+c^2)$.
右辺 $= 2\{\sqrt{(0-a)^2+(0-0)^2}^2 + \sqrt{(0-b)^2+(0-c)^2}^2\} = 2(a^2+b^2+c^2)$. よって左辺 = 右辺//

375. 直線 BC は x 軸だから, 点 A から辺 BC に引く垂線は y 軸 ($x = 0\cdots$①) である.
直線 AC の傾きは $\dfrac{a-0}{0-c} = -\dfrac{a}{c}$. 垂直な直線の傾きを m とすると $-\dfrac{a}{c}m = -1$ より $m = \dfrac{c}{a}$. よって点 B から辺 CA に引く垂線は (点 B を通るから)$y - 0 = \dfrac{c}{a}(x-b)$, すなわち $y = \dfrac{c}{a}x - \dfrac{bc}{a}\cdots$②.
直線 AB の傾きは $\dfrac{0-a}{b-0} = -\dfrac{a}{b}$. 垂直な直線の傾きを m とすると $-\dfrac{a}{b}m = -1$ より $m = \dfrac{b}{a}$. よって点 C から辺 AB に引く垂線は (点 C を通るから)$y - 0 = \dfrac{b}{a}(x-c)$, すなわち $y = \dfrac{b}{a}x - \dfrac{bc}{a}\cdots$③.
①②③より 3 つの垂線は点 $\mathrm{P}\left(0, -\dfrac{bc}{a}\right)$ を通る, すなわち 1 点 P で交わる.

376. 辺 AB, BC, CA の中点を L, M, N とすると $\mathrm{L}\left(\dfrac{a-c}{2}, \dfrac{b-b}{2}\right), \mathrm{M}\left(\dfrac{-c+c}{2}, \dfrac{-b-b}{2}\right), \mathrm{N}\left(\dfrac{c+a}{2}, \dfrac{-b+b}{2}\right)$,
すなわち $\mathrm{L}\left(\dfrac{a-c}{2}, 0\right), \mathrm{M}(0, -b), \mathrm{N}\left(\dfrac{a+c}{2}, 0\right)$.
直線 AB, BC, CA の傾きはそれぞれ $\dfrac{-b-b}{-c-a} = \dfrac{2b}{a+c}, \dfrac{-b-(-b)}{c-(-c)} = 0, \dfrac{b-(-b)}{a-c} = \dfrac{2b}{a-c}$.
よって辺 BC に垂直な直線は y 軸に平行で, 垂直二等分線は M をとおるので $x = 0\cdots$①.
また辺 AB, CA に垂直な直線の傾きをそれぞれ m, m' とすると $\dfrac{2b}{a+c}m = -1, \dfrac{2b}{a-c}m' = -1$ より
$m = -\dfrac{a+c}{2b}, m' = -\dfrac{a-c}{2b}$. よって辺 AB, CA の垂直二等分線はそれぞれ L, N を通るから
$y - 0 = -\dfrac{a+c}{2b}\left(x - \dfrac{a-c}{2}\right), y - 0 = -\dfrac{a-c}{2b}\left(x - \dfrac{a+c}{2}\right)$, すなわち $y = -\dfrac{a+c}{2b}x + \dfrac{a^2-c^2}{4b}\cdots$②,
$y = -\dfrac{a+c}{2b}x + \dfrac{a^2-c^2}{4b}\cdots$③.
①②③より 3 つの垂直二等分線は点 $\mathrm{P}\left(0, \dfrac{a^2-c^2}{4b}\right)$ を通る, すなわち 1 点 P で交わる.

377. △ABC の重心, 垂心, 外心をそれぞれ G, H, O とすると $\mathrm{G}\left(\dfrac{0+(-3)+3}{3}, \dfrac{4+0+0}{3}\right)$, すなわち $\mathrm{G}\left(0, \dfrac{4}{3}\right)$.
375 より $\mathrm{H}\left(0, -\dfrac{-3\cdot 3}{4}\right)$, すなわち $\mathrm{H}\left(0, \dfrac{9}{4}\right)$.
△ABC を y 軸方向に -2 平行移動ものを △A′B′C′, その外心を O′ とすると $\mathrm{A}'(0, 2), \mathrm{B}'(-3, -2), \mathrm{C}'(3, -2)$.
よって 376 より $\mathrm{O}'\left(0, \dfrac{0^2-3^2}{4\cdot 2}\right)$, すなわち $\mathrm{O}'\left(0, -\dfrac{9}{8}\right)$. O は O′ を y 軸方向に 2 平行移動したものだから
$\mathrm{O}\left(0, -\dfrac{9}{8}+2\right)$, すなわち $\mathrm{O}\left(0, \dfrac{7}{8}\right)$.

378. (1) 点 $A(3,5)$, 求める点 $P(u,v)$ とすると直線 AP の傾きは $\dfrac{v-5}{u-3}$. AP は $y=2x$ と垂直だから $\dfrac{v-5}{u-3}\cdot 2=-1$.

よって $u+2v=13\cdots$①. AP の中点 $\left(\dfrac{3+u}{2},\dfrac{5+v}{2}\right)$ は $y=2x$ 上にあるから $\dfrac{v+5}{2}=2\cdot\dfrac{u+3}{2}$.

よって $2u-v=-1\cdots$②. ①$+$②$\times 2$ より $5u=11$. よって $u=\dfrac{11}{5}$. ①より $v=\dfrac{43}{5}$. 従って $P\left(\dfrac{11}{5},\dfrac{27}{5}\right)$.

(2) 点 $A(3,5)$, 求める点 $P(u,v)$ とすると AP の中点 $\left(\dfrac{3+u}{2},\dfrac{5+v}{2}\right)$ が点 $(-2,1)$ に一致するから

$\dfrac{u+3}{2}=-2,\ \dfrac{v+5}{2}=1$. よって $u=-7, v=-3$. 従って $P(-7,-3)$.

379. (1) 点 $D(x,y)$ とすると AD=AB より $\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(8-4)^2+(4-2)^2}$.

よって $x^2+y^2-8x-4y=0\cdots$①.

また直線 AD, AB の傾きはそれぞれ $\dfrac{y-2}{x-4},\ \dfrac{4-2}{8-4}=\dfrac{1}{2}$. よって AD$\perp$AB より $\dfrac{y-2}{x-4}\cdot\dfrac{1}{2}=-1$.

従って $y=-2x+10\cdots$②. これを①に代入して $x^2+(-2x+10)^2-8x-4(-2x+10)=0$. よって

$5x^2-40x+60=5(x-2)(x-6)=0$. 従って $x=2,6$. ②より $y=6,-2$ だから $D(2,6)$ または $(6,-2)$.

D は第 1 象限の点だから $D(2,6)$.

(2) 対角線は互いに中点で交わるから, 求める対角線の交点は対角線 BD の中点 $\left(\dfrac{8+2}{2},\dfrac{4+6}{2}\right)$, すなわち $(5,5)$.

(3) 点 $C(x,y)$ とすると (2) より対角線 AC の中点 $\left(\dfrac{4+x}{2},\dfrac{2+y}{2}\right)$ が $(5,5)$ だから $\dfrac{x+4}{2}=5,\ \dfrac{y+2}{2}=5$.

よって $x=6, y=8$. 従って $C(6,8)$.

380. (1) $\ell: y=\dfrac{3}{2}x+2$. H は ℓ 上の点だから $H\left(t,\dfrac{3}{2}t+2\right)$ とおく. 直線 AH の傾きは $\dfrac{\frac{3}{2}t+2-2}{t-1}=\dfrac{3t}{2(t-1)}$.

AH$\perp\ell$ より $\dfrac{3t}{2(t-1)}\cdot\dfrac{3}{2}=-1$. よって $9t=-4t+4$ より $t=\dfrac{4}{13}$. 従って $H\left(\dfrac{4}{13},\dfrac{32}{13}\right)$.

(2) AH$=\sqrt{\left(\dfrac{4}{13}-1\right)^2+\left(\dfrac{32}{13}-2\right)^2}=\sqrt{\dfrac{(-9)^2+6^2}{13^2}}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$.

381. 直線の式は $3x-2ax+ay-2y+5a+1=3x-2y+1+a(-2x+y+5)=0$ となるから $3x-2y+1=0\cdots$①,

$-2x+y+5=0\cdots$② を解けばよい. ①$+$②$\times 2$ より $-x+11=0$, すなわち $x=11$. ②より $y=17$.

よって定点 $(11,17)$ を通る.

382. (1) $y-3x-1+k(x-2y-4)=0\cdot$① は 1 次方程式だから直線を表す. 点 $A(x,y)$ とすると A は 2 直線の交点だから

$y=3x+1\Leftrightarrow y-3x-1=0, x-2y-4=0$ をみたす. よって①をみたすから①は点 A を通る直線を表す.

(2) ①が $B(5,1)$ を通ればよいから $1-3\cdot5-1+k(5-2\cdot1-4)=0$. よって $k=-15$, ①は $y-3x-1-15(x-2y-4)=0$,

すなわち $18x-31y-59=0$.

(3) 直線 $3x+4y=5$ の傾きは $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$ より $-\dfrac{3}{4}$. ①の傾きは $y-3x-1+k(x-2y-4)$

$=(k-3)x-(2k-1)y-(4k+1)\Leftrightarrow y=\dfrac{k-3}{2k-1}x-\dfrac{4k+1}{2k-1}$ より $\dfrac{k-3}{2k-1}$.

垂直条件より $-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{k-3}{2k-1}=-1$. よって $3(k-3)=4(2k-1)$ より $k=-1$.

①より $y-3x-1-(x-2y-4)=0$. よって $4x-3y-3=0$.

383. (1) $\ell_1: x-1+ky=0$ より ℓ_1 は点 $(1,0)$ を通る. $\ell_2: x+2y-2+kx=0$ より ℓ_2 は点 $(0,1)$ を通る.

(2) $\ell_1: y=-\dfrac{1}{k}x+\dfrac{1}{k}, \ell_2: y=-\dfrac{k+1}{2}x+1$ より $-\dfrac{1}{k}=-\dfrac{k+1}{2}$. よって $k^2+k-2=(k-1)(k+2)=0$.

$k=1,-2$. $k=1$ のとき $\ell_1: y=-x+1, \ell_2: -x+1$ で一致するので $k=-2$.

(3) (2) と同様にして $-\dfrac{1}{k}\cdot\left(-\dfrac{k+1}{2}\right)=-1$. よって $k+1=-2k$. $k=-\dfrac{1}{3}$.

(4) (2) より $y=-\dfrac{1}{k}x+\dfrac{1}{k}, y=-\dfrac{k+1}{2}x+1$. よって $-\dfrac{1}{k}x+\dfrac{1}{k}=-\dfrac{k+1}{2}x+1$ より $-2x+2=-k(k+1)x+2k$,

$x=\dfrac{2k-2}{k(k+1)-2}=\dfrac{2(k-1)}{(k-1)(k+2)}$. $k\neq 1,-2$ より $x=\dfrac{2}{k+2}$. $y=\dfrac{1}{k+2}$. よって交点は $x=2y$ 上にある.