p.74. 6 章§ 2. 2 次曲線　BASIC

384. 中心 (a, b) 半径 r の円の方程式 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

(1) $x^2+(y+2)^2=5$.

(2) $(x+2)^2+(y-3)^2=r^2$. $(1,4)$ を通るから $(1+2)^2+(4-3)^2=r^2 \Rightarrow r^2=10$ よって $(x+2)^2+(y-3)^2=10$.

(3) 2 点の中点 $\left(\dfrac{0+4\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3+7}{2}\right)$ すなわち $(2\sqrt{3}, 5)$ が中心. 直径が $\sqrt{(4\sqrt{3}-0)^2+(7-3)^2}=8$ より半径 4.

よって $(x-2\sqrt{3})^2+(y-5)^2=16$.

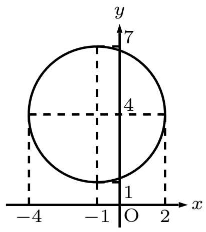
385. (1) $x^2+y^2+2x-8y+8=x^2+2x+y^2-8y+8$

$=(x+1)^2-1+(y-4)^2-16+8=0$.

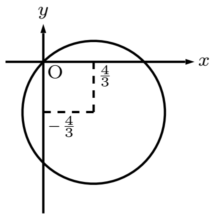
$(x+1)^2+(y-4)^2=9$. よって中心 $(-1,4)$, 半径 3.

(2) $x^2+y^2-\dfrac{8}{3}x+\dfrac{8}{3}y=0$ より

(1)



(2)



$\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2-\dfrac{16}{9}+\left(y+\dfrac{4}{3}\right)^2-\dfrac{16}{9}=0$. $\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2+\left(y+\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{32}{9}$. よって中心 $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{4}{3}\right)$, 半径 $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

386. (1) 求める円の方程式を $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ とおくと 3 点を通るので $1^2+(-1)^2+A-B+C=0, (-1)^2+(-3)^2-A-3B+C=0, (-2)^2-2A+C=0$. これより $A=\dfrac{3}{2}, B=\dfrac{5}{2}, C=-1$. よって $x^2+y^2+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{5}{2}y-1=0$.

(2) 条件より中心を $(a,-a)$ とおくと求める円の方程式は $(x-a)^2+(y+a)^2=r^2$. 2 点を通るから $(4-a)^2+(6+a)^2=r^2, (-2-a)^2+(4+a)^2=r^2$. これらを整理して $2a^2+4a+52=r^2\cdots$①$, 2a^2+12a+20=r^2\cdots$②.

② − ① より $8a-32=0, a=4, r=10$. よって $(x-4)^2+(y+4)^2=100$.

387. $A(0,0), B(1,0)$, 条件をみたす点を $P(x,y)$ とすると $AP:BP=3:2$ より $3BP=2AP$. よって

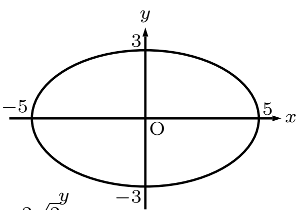
$3\sqrt{(x-1)^2+y^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$ だから $9\{(x-1)^2+y^2\}=4(x^2+y^2)$. 整理して $x^2+y^2-\dfrac{18}{5}x+\dfrac{9}{5}=0$.

$\left(x-\dfrac{9}{5}\right)^2+y^2=-\dfrac{9}{5}+\dfrac{81}{25}=\dfrac{36}{25}$. よって中心 $\left(\dfrac{9}{5}, 0\right)$, 半径 $\dfrac{6}{5}$ の円.

388. $P(x,y)$ とすると $AP^2+BP^2=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}^2+\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}^2=(x+1)^2+(y+1)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=2x^2+2y^2+4=6$. よって $x^2+y^2=1$. 原点中心, 半径 1 の円.

389. 頂点の座標より $a=4, b=7$. 楕円の方程式は $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{49}=1$. 縦長だから焦点は y 軸上. $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{7^2-4^2}=\sqrt{33}$. よって焦点の座標は $(0, \pm\sqrt{33})$.

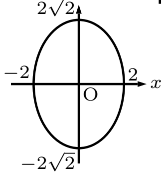
390. 焦点より横長だから長軸の長さ $=2a=10$. よって $a=5$.
また $c=4$ だから $c^2=a^2-b^2$ より $4^2=5^2-b^2 \Rightarrow$
$b^2=25-16=9$. 求める楕円の方程式は $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.



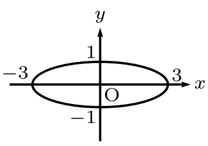
391. 焦点より縦長だから短軸の長さ $=2a=4$. よって $a=2$.

また $c=2$ だから $c^2=b^2-a^2$ より $b^2=2^2+2^2=8$.

求める楕円の方程式は $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{8}=1$.



392. (1) $a^2=9, b^2=1$ より $a=3, b=1$. $a>b$ より $c^2=a^2-b^2=9-1=8$. よって $c=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

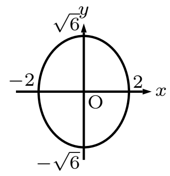


$a>b$ より横長だから焦点は x 軸上で座標は $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$. また長軸の長さは $2a=6$, 短軸の長さは $2b=2$.

(2) 与式を変形して $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{6}=1$. $a^2=4, b^2=6$ より $a=2, b=\sqrt{6}$. $b>a$ より $c^2=b^2-a^2=2$.

よって $c=\sqrt{2}$. $b>a$ より縦長だから焦点は y 軸上で座標は $(0,\pm\sqrt{2})$.

また長軸の長さは $2b=2\sqrt{6}$, 短軸の長さは $2a=4$.



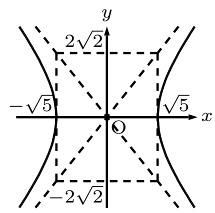
393. $c^2=a^2+b^2=3+12=15, c=\sqrt{15}$. 双曲線の方程式の右辺 $=1$ より焦点は x 軸上で座標は $(\pm\sqrt{15},0)$.

漸近線の方程式は $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{12}=0$ より $y^2=4x^2$, すなわち $y=\pm 2x$.

394. $c=5, a=1$. $c^2=a^2+b^2$ より $5^2=1^2+b^2 \Rightarrow b^2=24$. 焦点が x 軸上にあるから

求める双曲線の方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, すなわち $x^2-\dfrac{y^2}{24}=1$.

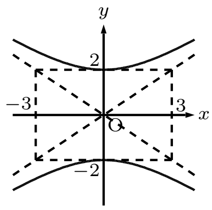
漸近線の方程式は $x^2-\dfrac{y^2}{24}=0$ より $y^2=24x^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{24}x$, すなわち $y=\pm 2\sqrt{6}x$.



395. 方程式より $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{8}=1$. $a^2=5, b^2=8 \Rightarrow c^2=a^2+b^2=13 \Rightarrow c=\sqrt{13}$.

方程式の右辺が $+1$ だから焦点は x 軸上. よって焦点の座標は $(\pm\sqrt{13},0)$.

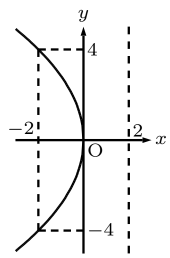
漸近線の方程式は $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{8}=0$ より $\dfrac{y^2}{8}=\dfrac{x^2}{5} \Rightarrow y=\pm\dfrac{2\sqrt{10}}{5}x$.



396. $a^2=9, b^2=4 \Rightarrow c^2=a^2+b^2=13 \Rightarrow c=\sqrt{13}$. 方程式の右辺が -1 だから

焦点は y 軸上. よって焦点の座標は $(0,\pm\sqrt{13})$.

漸近線の方程式は $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=0$ より $\dfrac{y^2}{4}=\dfrac{x^2}{9} \Rightarrow y=\pm\dfrac{2}{3}x$.

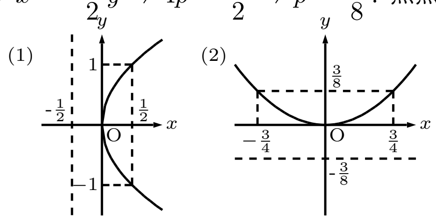


397. $p=-2$. $y^2=4px$ より放物線の方程式は $y^2=-8x$.

398. (1) $y^2=4px$ より $2=4p \Rightarrow p=\dfrac{1}{2}$. よって焦点の座標 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

準線の方程式 $x=-\dfrac{1}{2}$.

(2) $x^2=\dfrac{3}{2}y \Rightarrow 4p=\dfrac{3}{2} \Rightarrow p=\dfrac{3}{8}$. 焦点は y 軸上で座標は $\left(0,\dfrac{3}{8}\right)$. 準線の方程式は $y=-\dfrac{3}{8}$.



399. $x^2=x+k \Rightarrow x^2-x-k=0$ が重解をもてばよいから $D=(-1)^2-4(-k)=0 \Rightarrow 4k+1=0 \Rightarrow k=-\dfrac{1}{4}$.

400. 求める接線の方程式を $y=-x+k$ とおくと $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{6}=1, y=-x+k$ より $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{(-x+k)^2}{6}=1$

$\Rightarrow 5x^2-4kx+2k^2-12=0$ が重解をもてばよいから $D=(-4k)^2-4\cdot 5\cdot(2k^2-12)=0 \Rightarrow -24k^2+240=0$

$\Rightarrow k=\pm\sqrt{10}$. よって求める接線の方程式は $y=-x\pm\sqrt{10}$.

401. $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1, y=2x+k$ より $x^2-\dfrac{(2x+k)^2}{3}=1$

$\Rightarrow x^2+4kx+k^2+3=0$. $D=(4k)^2-4\cdot(k^2+3)=12k^2-12=12(k+1)(k-1)$.

$D>0$ のとき, すなわち $k<-1, 1<k$ のとき x は異なる 2 実数解だから共有点は 2 個.

$D=0$ のとき, すなわち $k=\pm 1$ のとき x は 2 重解だから共有点は 1 個.

$D<0$ のとき, すなわち $-1<k<1$ のとき x は虚数解 (実数解はない) だから共有点は 0 個.

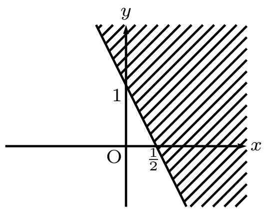
402. 円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 (x_0,y_0) における接線の方程式は $x_0x+y_0y=r^2$.

(1) $-x+2y=5$.　　(2) $0x-\sqrt{5}y=5 \rightarrow y=-\sqrt{5}$.　　(3) $\sqrt{5}x+0y=5 \rightarrow x=\sqrt{5}$.

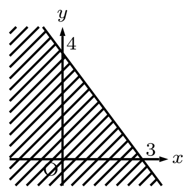
403. $\triangle$ABC で AB$=5$, BC$=7$, CA$=8$ とする．また, 内接円の半径を r, 中心 (内心) を O とする．$\triangle$ABC の面積を S, $\triangle$OAB, $\triangle$OBC, $\triangle$OCA の面積をそれぞれ S_1, S_2, S_3 とすると $S=S_1+S_2+S_3, S_1=\dfrac{1}{2}5r, S_2=\dfrac{1}{2}7r, S_3=\dfrac{1}{2}7r$ だから $S=\dfrac{1}{2}5r+\dfrac{1}{2}7r+\dfrac{1}{2}8r=\dfrac{1}{2}(5+7+8)r=10r\cdots$①.

ヘロンの公式より $s=\dfrac{5+7+8}{2}=10$ によって $S=\sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)}=10\sqrt{3}\cdots$②. ①,②より $r=\sqrt{3}$.

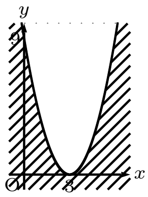
404. (1) 直線 $y=-2x+1$ の上側 (2) $y\leqq-\dfrac{4}{3}x+4$ より直線の下側 (3) 放物線 $y=(x-3)^2$ の下側 (4) $y\leqq-(x+1)^2+2$ より放物線の下側



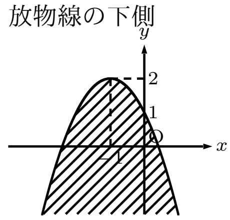
境界を含まない



境界を含む

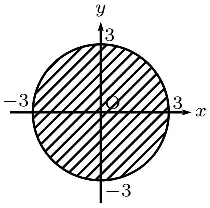


境界を含まない

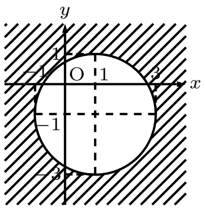


境界を含む

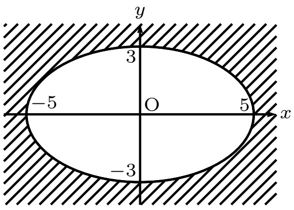
405. (1) 円 $x^2+y^2=9$ の内側 (2) 円 $(x-1)^2+(y+1)^2=4$ の外側 (3) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}>1$ より楕円の外側



境界を含む

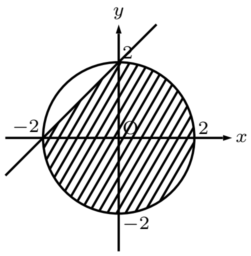


境界を含まない

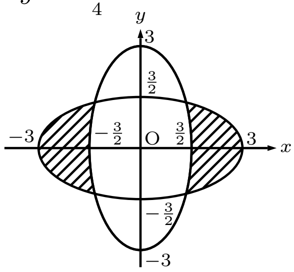


境界を含まない

406. (1) $y<x+2$(直線の下側)$x^2+y^2<4$(円の内側) (2) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{\frac{9}{4}}\leqq1$(楕円の内側)$\dfrac{x^2}{\frac{9}{4}}+\dfrac{y^2}{9}\geqq1$(楕円の外側)



境界を含まない



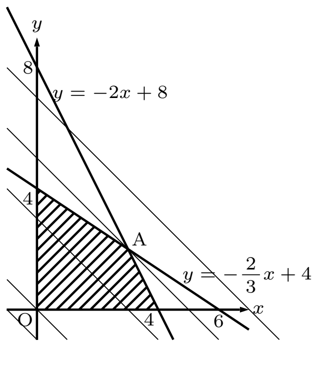
境界を含む

407. (1) $y\leqq-2x+8, y\leqq-\dfrac{2}{3}x+4, x\geqq0, y\geqq0$ より下図の領域.

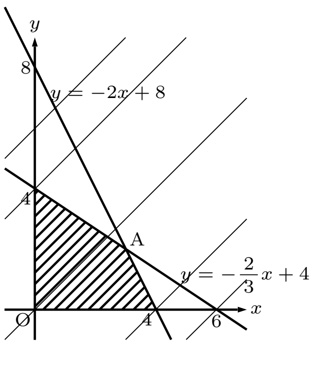
$x+y=k$ とおくと $y=-x+k$ より領域内の点が k の値をとるのは, この傾き -1 の直線が領域を通るときである. このとき切片 k が最大となるのは点 A を通るときである. $y=-2x+8, y=-\dfrac{2}{3}x+4$ より $-2x+8=-\dfrac{2}{3}x+4\Rightarrow$ $x=3, y=2$. よって A$(3,2)$. A を通るとき $k=x+y=3+2=5$. よって最大値は 5.

(2) 同様に $x-y=k$ とおくと $y=x-k$. 領域内の点が k の値をとるのは, この傾き 1 の直線が領域を通るときである. k が最大, すなわち切片 $-k$ が最小となるのは $(4,0)$ を通るときで, このとき $k=x-y=4-0=4$. よって最大値は 4.

(1)



(2)



408. $(x-2)^2+\{y-(-2)\}^2=3^2$. よって $(x-2)^2+(y+2)^2=9$

409. 求める円の方程式を $x^2+y^2+ax+by+c=0$ とする．3 点を通るから $2^2+1^2+2a+b+c=0, 3^2+1^2+3a+b+c=0,$

$2^2+2^2+2a+2b+c=0$. よって $2a+b+c=-5\cdots$①$, 3a+b+c=-10\cdots$②$, 2a+2b+c=-8\cdots$③.

② − ① より $a=-5$. ③ − ① より $b=-3$. ①より $c=8$. よって円の方程式は $x^2+y^2-5x-3y+8=0$.

410. $\mathrm{A}(-3,2)$, $\mathrm{B}(5,-6)$, 2 点からの距離の比が $1:3$ である点を $\mathrm{P}(x,y)$ とおくと AP:BP$=1:3$ より $\mathrm{AP}^2:\mathrm{BP}^2=1:9$.

よって $\mathrm{BP}^2=9\mathrm{AP}^2$ だから $(x-5)^2+\{y-(-6)\}^2=9[\{x-(-3)\}^2+(y-2)^2]$,

$x^2-10x+25+y^2+12y+36=9(x^2+6x+9+y^2-4y+4)$. よって $8x^2+8y^2+64x-48y+56=0$ より

$x^2+y^2+8x-6y+7=0$. $(x+4)^2+(y-3)^2=18=(3\sqrt{2})^2$. よって中心 $(-4,3)$, 半径 $3\sqrt{2}$ の円.

411. 焦点の位置より長軸は x 軸上で $a=3$. 焦点の座標より $c=\sqrt{2}$ だから $b^2+c^2=a^2$ より $b^2=a^2-c^2=9-2=7$.

よって $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{7}=1$.

412. 求める楕円の方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とすると 2 点を通るから $\dfrac{16}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}=1\cdots$①$,\ \dfrac{36}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1\cdots$②.

② $\times 4-$ ① より $\dfrac{128}{a^2}=3$. よって $a^2=\dfrac{128}{3}$. ①より $\dfrac{48}{128}+\dfrac{4}{b^2}=1$ だから $b^2=\dfrac{128}{20}$. 従って

楕円の方程式は $\dfrac{3x^2}{128}+\dfrac{20y^2}{128}=1 \Leftrightarrow 3x^2+20y^2=128$. $a>b$ より $b^2+c^2=a^2$.

よって $c^2=a^2-b^2=\dfrac{128}{3}-\dfrac{128}{20}=\dfrac{128(20-3)}{3\cdot 20}=\dfrac{32\cdot 17}{15}$, $c=\dfrac{4\sqrt{34}}{\sqrt{15}}(=\dfrac{4\sqrt{510}}{15}$.

また $a>b$ より焦点は x 軸上にあるから焦点の座標は $\left(\pm\dfrac{4\sqrt{34}}{\sqrt{15}},0\right)$.

413. $a^2=7, b^2=16$ より $a=\sqrt{7}, b=4$. $b>a$ より長軸の長さ $=2b=8$, 短軸の長さ $=2a=2\sqrt{7}$. また $b>a$ より焦点は

y 軸上にあり, $a^2+c^2=b^2$ だから $c^2=b^2-a^2=16-7=9, c=3$. よって焦点の座標は $(0,\pm 3)$.

414. 焦点が y 軸上にあるから主軸は y 軸上で $2b=2$ より $b=1$. $a^2+b^2=c^2$ より $a^2=c^2-b^2=\sqrt{5}^2-1^2=4$. よって

$a=2$. また焦点が y 軸上にあるから双曲線の方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$, すなわち $\dfrac{x^2}{4}-y^2=-1$.

415. 求める双曲線の方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm 1$ とすると点 $(0,1)$ を通るから $-\dfrac{1}{b^2}=\pm 1$. よって双曲線の方程式は

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ で, $b^2=1$, すなわち $b=1$. 漸近線より $\dfrac{b}{a}=2$, すなわち $\dfrac{1}{a}=2$ だから $a=\dfrac{1}{2}$.

よって双曲線の方程式は $\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}}-\dfrac{y^2}{1}=-1$, すなわち $4x^2-y^2=-1$.

$c^2=a^2+b^2=\dfrac{1}{4}+1=\dfrac{5}{4}$. よって $c=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. 双曲線の方程式から焦点は y 軸上にあるから焦点の座標は $\left(0,\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

416. 双曲線の方程式より $a^2=4, b^2=12$ で焦点は x 軸上にある．$c^2=a^2+b^2=4+12=16$ より $c=4$,

焦点の座標は $(\pm 4,0)$. $a=2, b=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ だから漸近線の方程式は $y=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{2}x$, すなわち $y=\pm\sqrt{3}x$.

417. 焦点の座標より $p=2$ で焦点が y 軸上にあるから放物線の方程式は $x^2=8y$.

418. 放物線の方程式より $4p=-1, p=-\dfrac{1}{4}$. また焦点は x 軸上にあるから焦点の座標は $\left(-\dfrac{1}{4},0\right)$, 準線の方程式は $x=\dfrac{1}{4}$.

419. 放物線の方程式 $y^2=4px\cdots$① より焦点は $(p,0)$, 放物線の軸は x 軸だから, これと垂直で焦点を通る直線

は $x=p$②. 放物線との交点は②を①に代入して $y^2=4p^2$. よって $y=\pm 2p$, $\mathrm{A}(p,-2p)$, $\mathrm{B}(p,2p)$.

よって AB$=\sqrt{(p-p)^2+\{2p-(-2p)\}^2}=|4p|=4p$ ($p>0$ だから). よって AB の長さは $4p$.

420. 求める接線の方程式を $y = mx + b$ とする．これを放物線の方程式に代入して $(mx+b)^2 = 4px$. よって

$m^2x^2 + (2bm - 4p)x + b^2 = 0$. これが 2 重解をもてばよいから $D = (2bm - 4p)^2 - 4m^2b^2$

$= 4b^2m^2 - 16bmp + 16p^2 - 4b^2m^2 = 16p(-bm + p) = 0$. $p \neq 0$ だから $-bm + p = 0$ より $b = \dfrac{p}{m}$.

よって接線の方程式は $y = mx + \dfrac{p}{m}$.

421. 円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は $x_1x + y_1y = r^2$ だから求める接線の方程式は $x + 3y = 10$.

よって $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{10}{3}$. 従って接線の傾きは $-\dfrac{1}{3}$, 切片は $\dfrac{10}{3}$.

422. (1) 第 2 象限で直線 $y = x + 1$ の下側だから $x < 0, y > 0, y < x + 1$.

(2) 円 $x^2 + y^2 = 2^2$ の内側で直線 $y = -x - 2$ の上側だから $x^2 + y^2 < 4, y > -x - 2$.

(3) 楕円 $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$ の内側で放物線 $y^2 = -4x \Leftrightarrow x = -\dfrac{y^2}{4}$ の左側 (x 座標の小さい側) だから

$\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} < 1, x < -\dfrac{y^2}{4} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} < 1, y^2 < -4x$.