p.54. 4 章 § 1. 面積・曲線の長さ・体積　STEPUP

214. (1) $y' = 3x^2 - 4$. よって A において $y' = -1$. よって接線の方程式は $y - (-3) = -(x-1)$, すなわち $y = -x - 2$.

(2) $y = x^3 - 4x, y = -x - 2 \Rightarrow x^3 - 4x - (-x-2) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) = 0 \Rightarrow x = 1, -2$.

1 は接点の x 座標だから交点の x 座標は -2. このとき $y = x^3 - 4x = (-2)^3 - 4(-2) = 0$. 交点 $\mathrm{B}(-2, 0)$.

(3) -2 と 1 の間の $x = 0$ のとき $x^3 - 4x = 0, -x - 2 = -2$. $0 > -2$ より $S = \displaystyle\int_{-2}^{1} \{x^3 - 4x - (-x-2)\}dx$

$$= \int_{-2}^{1} (x^3 - 3x + 2)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 - (4 - 6 - 4) = \frac{27}{4}.$$

215. $y' = 2x$ より (t, t^2+1) における接線の方程式は $y - (t^2+1) = 2t(x-t)$, すなわち $y = 2tx - t^2 + 1$.

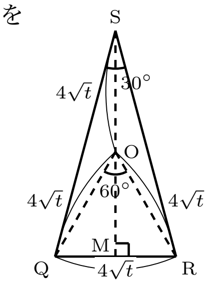
$y = x^2, y = 2tx - t^2 + 1 \Rightarrow x^2 - (2tx - t^2 + 1) = x^2 - 2tx + t^2 - 1 = (x - t + 1)(x - t - 1) = 0 \Rightarrow x = t - 1, t + 1$.

$t - 1$ と $t + 1$ の間の $x = t$ のとき $x^2 = t^2, 2tx - t^2 + 1 = t^2 + 1$. $t^2 < t^2 + 1$ より $S = \displaystyle\int_{t-1}^{t+1} (2tx - t^2 + 1 - x^2)dx$

$$= \left[tx^2 - (t^2-1)x - \frac{x^3}{3}\right]_{t-1}^{t+1} = t\{(t+1)^2 - (t-1)^2\} - (t^2-1)\{(t+1) - (t-1)\} - \frac{(t+1)^3 - (t-1)^3}{3}$$

$= 4t^2 - 2(t^2 - 1) - \dfrac{6t^2 + 2}{3} = \dfrac{4}{3}$. よって接線と放物線 $y = x^2$ で囲まれる図形の面積は $\dfrac{4}{3}$ で一定である.

216. $\mathrm{P}(t, 0)$ とすると点 P を通り x 軸に垂直な直線は $x = t$ だから $x = t, y^2 = 4x$ より $y^2 = 4t, y = \pm 2\sqrt{t}$.



よって Q, R は $(t, \pm 2\sqrt{t})$, QR$= 4\sqrt{t}$. $\triangle$QRS を $\angle$S$= 30°$, QS=RS の二等辺三角形, O を外心, M を QR の中点とすると $\angle$QOR$= 60°$, OM$\perp$QR, OQ=OR=RS$= 4\sqrt{t}$, MQ$=2\sqrt{t}$. 三平方の定理より

OM^2 =OQ^2−MQ^2 $= (4\sqrt{t})^2 - (2\sqrt{t})^2 = 12t$, OM$= \sqrt{12t} = 2\sqrt{3t}$. よって $\triangle$QRS の面積 $S(t)$ は

$S(t) = \dfrac{1}{2}$QR·MS$= \dfrac{1}{2} \cdot 4\sqrt{t} \cdot (4\sqrt{t} + 2\sqrt{3t}) = 4(2 + \sqrt{3})t$. 求める立体の体積 V は

$$V = \int_0^1 S(t)dt = \int_0^1 4(2+\sqrt{3})tdt = 4(2+\sqrt{3})\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 2(2+\sqrt{3}).$$

217. (1) 与式より $\sqrt{y} = 1 - \sqrt{x}, y = (1 - \sqrt{x})^2 = 1 - 2\sqrt{x} + x$. よって $S = \displaystyle\int_0^1 (1 - 2\sqrt{x} + x)dx = \left[x - 2 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1$

$= 1 - \dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$.

(2) $V = \pi \displaystyle\int_0^1 (1 - \sqrt{x})^4 dx$. $1 - \sqrt{x} = t$ とおくと $x = (1-t)^2$, $dx = 2(1-t)(-1)dt = 2(t-1)dt$.

x	$0 \to 1$
t	$1 \to 0$

$$V = \pi\int_1^0 t^4 \cdot 2(t-1)dt = 2\pi\int_0^1 (t^4 - t^5)dt = 2\pi\left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^6}{6}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{15}.$$

218. (1) $f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}(-x)'}{2} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $1 + \{f'(x)\}^2 = 1 + \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1 + \dfrac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4}$

$$= \frac{4 + e^{2x} - 2e^x \cdot \frac{1}{e^x} + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2.$$

$$h(\alpha) = \int_\alpha^{\alpha+1} \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}dx = \int_\alpha^{\alpha+1} \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2}dx = \int_\alpha^{\alpha+1} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)dx = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]_\alpha^{\alpha+1}$$

$$= \frac{e^{\alpha+1} - e^{-\alpha-1} - (e^\alpha - e^{-\alpha})}{2} = \frac{(e-1)(e^\alpha + e^{-\alpha-1})}{2}.$$

(2) $e^\alpha > 0, e^{-\alpha-1} > 0$ だから相加平均と相乗平均の関係より $\dfrac{e^\alpha + e^{-\alpha-1}}{2} \geqq \sqrt{e^\alpha e^{-\alpha-1}} = \sqrt{e^{-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

$e - 1 > 0$ より $h(\alpha) \geqq \dfrac{e-1}{\sqrt{e}}$. 等号は $e^\alpha = e^{-\alpha-1}$, すなわち $\alpha = -\alpha - 1$, $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ のときだから

$h(\alpha)$ は $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{e-1}{\sqrt{e}}$ をとる.

219. (1) $y = 2x^2 + 3x - 1, x$ 軸 $y = 0$ より $2x^2 + 3x - 1 = 0, x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$.

よって例題より求める面積は $\dfrac{1}{6} \cdot 2\left(\dfrac{-3 + \sqrt{17}}{4} - \dfrac{-3 - \sqrt{17}}{4}\right)^3 = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\sqrt{17}}{2}\right)^3 = \dfrac{17\sqrt{17}}{24}$.

(2) $y=(x+3)(x-1), y=-\dfrac{1}{2}x+2$ より $(x+3)(x-1)-\left(-\dfrac{1}{2}x+2\right)=x^2+\dfrac{5}{2}x-5=0, x=\dfrac{-\frac{5}{2}\pm\sqrt{(\frac{5}{2})^2-4\cdot 5}}{2}$

$=\dfrac{-5\pm\sqrt{105}}{4}$. 求める面積は $\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{-5+\sqrt{105}}{4}-\dfrac{-5-\sqrt{105}}{4}\right)^3=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{\sqrt{105}}{2}\right)^3=\dfrac{105\sqrt{105}}{48}=\dfrac{35\sqrt{105}}{16}$.

220. $y=x^2, y=mx+1$ より $x^2-mx-1=0, x=\dfrac{m\pm\sqrt{m^2-4\cdot(-1)}}{2}=\dfrac{m\pm\sqrt{m^2+4}}{2}$.

よって求める面積は $\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{m+\sqrt{m^2+4}}{2}-\dfrac{m-\sqrt{m^2+4}}{2}\right)^3=\dfrac{1}{6}\sqrt{m^2+4}^3=\dfrac{(m^2+4)\sqrt{m^2+4}}{6}$.

221. $y'=3ax^2+2bx+c$. よって接点を $(\alpha, a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d)$ とすると接線の方程式は

$y-(a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d)=(3a\alpha^2+2b\alpha+c)(x-\alpha)$, すなわち $y=(3a\alpha^2+2b\alpha+c)x-2a\alpha^3-b\alpha^2+d$.

3 次曲線と接線の交点の x 座標は $y=ax^3+bx^2+cx+d, y=(3a\alpha^2+2b\alpha+c)x-2a\alpha^3-b\alpha^2+d$ より

$(ax^3+bx^2+cx+d)-\{(3a\alpha^2+2b\alpha+c)x-2a\alpha^3-b\alpha^2+d\}=a(x^3-3\alpha^2x+2\alpha^3)+b(x^2-2\alpha x+\alpha^2)$

$=a(x-\alpha)^2(x+2\alpha)+b(x-\alpha)^2=(x-\alpha)^2(ax+2a\alpha+b)=0\Rightarrow x=\alpha, -2\alpha-\dfrac{b}{a}$. α は接点の x 座標だから

交点の x 座標は $\beta=-2\alpha-\dfrac{b}{a}$. よって $2a\alpha+b=-a\beta$ より $ax+2a\alpha+b=ax-a\beta=a(x-\beta)$. よって

$(ax^3+bx^2+cx+d)-\{(3a\alpha^2+2b\alpha+c)x-2a\alpha^3-b\alpha^2+d\}=a(x-\alpha)^2(x-\beta)\cdots$①.

(i) $\beta>\alpha$ のとき $a>0, (x-\alpha)^2\geqq 0$ より $\alpha\leqq x\leqq\beta$ の場合①の右辺 $\leqq 0$. よって求める図形の面積 S は

$S=\displaystyle\int_\alpha^\beta[\{(3a\alpha^2+2b\alpha+c)x-2a\alpha^3-b\alpha^2+d\}-(ax^3+bx^2+cx+d)]dx=-\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)^2(x-\beta)dx$.

(ii) $\beta<\alpha$ のとき ①の右辺 $\leqq 0$. よって $S=\displaystyle\int_\beta^\alpha[(ax^3+bx^2+cx+d)-\{(3a\alpha^2+2b\alpha+c)x-2a\alpha^3-b\alpha^2+d\}]dx$

$=\displaystyle\int_\beta^\alpha a(x-\alpha)^2(x-\beta)dx=-\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)^2(x-\beta)dx$.

(i)(ii) より $S=-\displaystyle\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)^2(x-\beta)dx$. 部分積分により $S=-a\left(\left[\dfrac{(x-\alpha)^3}{3}(x-\beta)\right]_\alpha^\beta-\displaystyle\int_\alpha^\beta\dfrac{(x-\alpha)^3}{3}dx\right)$

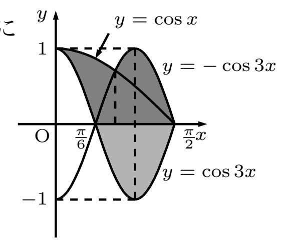
$=-a\left(0-0-\left[\dfrac{(x-\alpha)^4}{12}\right]_\alpha^\beta\right)=\dfrac{1}{12}a(\beta-\alpha)^4$.

222. (1) $y=\cos x, y=\cos 3x$ より $\cos x-\cos 3x=0$. 和・差を積に直す公式より $\cos x-\cos 3x=-2\sin\dfrac{x+3x}{2}\sin\dfrac{x-3x}{2}$

$=2\sin 2x\sin x=4\sin^2x\cos x=0$. $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $x=0, \dfrac{\pi}{2}$. $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\sin x\geqq 0, \cos x\geqq 0$ より

$\cos x\geqq\cos 3x$. よって求める面積は $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\cos 3x)dx=\left[\sin x-\dfrac{\sin 3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\sin\frac{3}{2}\pi}{3}=1+\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}$.

(2) x 軸より下の部分を折り返した部分を考えると右図の x 軸より上の影の部分を x 軸の周りに回転してできる回転体になるから



$V=\pi\left(\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2xdx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(-\cos 3x)^2dx-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3xdx\right)$

$=\pi\left(\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1+\cos 2x}{2}dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\cos 6x}{2}dx-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{1+\cos 6x}{2}dx\right)$

$=\dfrac{\pi}{2}\left(\left[x+\dfrac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[x+\dfrac{\sin 6x}{6}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\left[x+\dfrac{\sin 6x}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}\right)$

$=\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{2}+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\sin 3\pi}{6}-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\sin\frac{3}{2}\pi}{6}-\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sin\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{6}\pi(\pi+2)$.

223. $x=y^2-1, y$ 軸 $x=0$ より $y^2-1=0, y=\pm 1$. -1 と 1 の間の $x=0$ のとき $y^2-1=-1<0$ より

$S=\displaystyle\int_{-1}^1\{0-(y^2-1)\}dy=2\int_0^1(1-y^2)dy=2\left[y-\dfrac{y^3}{3}\right]_0^1=2\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{3}$.

224. $y=x^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{y}$ より求める回転体は曲線 $x=\sqrt{y}$ と $y=0, y=2, y$ 軸で囲まれた図形を y 軸のまわりに回転してできる回転体だから $V=\pi\displaystyle\int_0^2\sqrt{y}^2dy=\pi\int_0^2ydy=\pi\left[\dfrac{y^2}{2}\right]_0^2=2\pi$.

225. 8 秒後の水面の高さを h とすると $y = x^4$ より $x^2 = \sqrt{y}$ だから, そのときの水の容積は

$\pi \displaystyle\int_0^h x^2 dy = \pi \int_0^h \sqrt{y} dy = \pi \left[\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^h = \frac{2}{3}\pi h^{\frac{3}{2}}$. 毎秒 60.75π だから 8 秒後は $60.75\pi \times 8 = 486\pi$.

よって $\dfrac{2}{3}\pi h^{\frac{3}{2}} = 486\pi, h^{\frac{3}{2}} = 729$, すなわち $h = 729h^{\frac{2}{3}} = 81$.