大日本図書　新微分積分 II 問題集　1 章§ 1 BASIC 詳しい解答

p.3. 1 章§ 1. 関数の展開　BASIC

1. 関数 $f(x)$ の $x=a$ における 1 次近似式 $f(a)+f'(a)(x-a)$

(1) $f(x)=e^{2x}\cos x, f'(x)=2e^{2x}\cos x-e^{2x}\sin x$. $f(0)=1, f'(0)=2$. よって $f(0)+f'(0)(x-0)=1+2x$.

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}=x^{-1}, f'(x)=-x^{-2}=-\dfrac{1}{x^2}$. $f(1)=1, f'(1)=-1$. よって $f(1)+f'(1)(x-1)=1-(x-1)=2-x$.

2. 関数 $f(x)$ の $x=a$ における 2 次近似式 $f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2$.

等式 $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\varepsilon_2$

(1) $f(x)=e^{3x}, f'(x)=3e^{3x}, f''(x)=9e^{3x}$. $f(0)=1, f'(0)=3, f''(0)=9$.

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+\varepsilon_2=1+3x+\dfrac{9}{2}x^2+\varepsilon_2$. よって $e^{3x}=1+3x+\dfrac{9}{2}x^2+\varepsilon_2$.

(2) $f(x)=x\sqrt{1+x}, f'(x)=\sqrt{1+x}+x\cdot\dfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}(1+x)'=\sqrt{1+x}+\dfrac{x}{2\sqrt{1+x}}=\dfrac{2+3x}{2\sqrt{1+x}}$,

$f''(x)=\dfrac{3\cdot 2\sqrt{1+x}-(2+3x)2\cdot\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}(1+x)'}{4(1+x)}=\dfrac{6\sqrt{1+x}-\frac{2+3x}{\sqrt{1+x}}}{4(1+x)}=\dfrac{4+3x}{4(1+x)\sqrt{1+x}}$.

$f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=1$.

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+\varepsilon_2=x+\dfrac{1}{2}x^2+\varepsilon_2$. よって $x\sqrt{1+x}=x+\dfrac{1}{2}x^2+\varepsilon_2$.

(3) $f(x)=\cos 2x, f'(x)=-2\sin 2x, f''(x)=-4\cos 2x$. $f(0)=1, f'(0)=0, f''(0)=-4$.

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+\varepsilon_2=1-\dfrac{4}{2}x^2+\varepsilon_2$. よって $\cos 2x=1-2x^2+\varepsilon_2$.

(4) $f(x)=\log(1+2x), f'(x)=\dfrac{(1+2x)'}{1+2x}=\dfrac{2}{1+2x}, f''(x)=2\cdot(-1)(1+2x)^{-2}(1+2x)'=-\dfrac{4}{(1+2x)^2}$.

$f(0)=\log 1=0, f'(0)=2, f''(0)=-4$.

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+\varepsilon_2=2x-\dfrac{4}{2}x^2+\varepsilon_2$. よって $\log(1+2x)=2x-2x^2+\varepsilon_2$.

3. $f(x)=\sqrt[3]{1-x}, f'(x)=\dfrac{1}{3}(1-x)^{-\frac{2}{3}}(1-x)'=-\dfrac{1}{3}(1-x)^{-\frac{2}{3}}, f''(x)=\dfrac{2}{9}(1-x)^{-\frac{5}{3}}(1-x)'=-\dfrac{9}{2}(1-x)^{-\frac{5}{3}}$.

$f(0)=1, f'(0)=-\dfrac{1}{3}, f''(0)=-\dfrac{2}{9}$. 2 次近似式は $f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2=1-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{9}x^2$. よって

$\sqrt[3]{0.8}=\sqrt[3]{1-0.2}=f(0.2)\fallingdotseq 1-\dfrac{1}{3}\cdot 0.2-\dfrac{1}{9}\cdot 0.2^2=1-0.066\cdots-0.0044\cdots=0.9288\cdots$. よって $\sqrt[3]{0.8}\fallingdotseq 0.929$.

4. $f(x)=e^x, f'(x)=f''(x)=f^{(3)}(x)=f^{(4)}(x)=e^x$. $f(0)=f'(0)=f''(0)=f^{(3)}(0)=f^{(4)}(0)=e^0=1$.

$e^x=f(x)\fallingdotseq f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\dfrac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4=1+x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{24}x^4$.

$\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}=f\left(\dfrac{1}{2}\right)\fallingdotseq 1+\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\dfrac{1}{24}\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=1+0.5+0.125+0.020833\cdots+0.002604166\cdots$

$=1.6484375$. よって $\sqrt{e}\fallingdotseq 1.6484$. $e=(\sqrt{e})^2=2.717222\cdots$ より $e\fallingdotseq 2.7172$.

5. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}, f'(x)=-\dfrac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}(1-x)'=\dfrac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}, f''(x)=-\dfrac{3}{4}(1-x)^{-\frac{5}{2}}(1-x)'=\dfrac{3}{4}(1-x)^{-\frac{5}{2}}$,

$f^{(3)}(x)=-\dfrac{15}{8}(1-x)^{-\frac{7}{2}}(1-x)'=\dfrac{15}{8}(1-x)^{-\frac{7}{2}}, f^{(4)}(x)=-\dfrac{105}{16}(1-x)^{-\frac{9}{2}}(1-x)'=\dfrac{105}{16}(1-x)^{-\frac{9}{2}}$.

$f(0)=1, f'(0)=\dfrac{1}{2}, f''(0)=\dfrac{3}{4}, f^{(3)}(0)=\dfrac{15}{8}, f^{(4)}(0)=\dfrac{105}{16}$. よって

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dfrac{f^{(3)}}{3!}x^3+\dfrac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+o(x^4)=1+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4\cdot 2!}x^2+\dfrac{15}{8\cdot 3!}x^3+\dfrac{105}{16\cdot 4!}x^4+o(x^4)$.

よって $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{8}x^2+\dfrac{5}{16}x^3+\dfrac{35}{128}x^4+o(x^4)$.

6. $f(x)=\log(2-x), f'(x)=\dfrac{(2-x)'}{2-x}=-(2-x)^{-1}, f''(x)=(2-x)^{-2}(2-x)'=-(2-x)^{-2}$,

$f^{(3)}(x)=2(2-x)^{-3}(2-x)'=-2!(2-x)^{-3}, f^{(4)}(x)=3\cdot 2!(2-x)^{-4}(2-x)'=-3!(2-x)^{-4},\cdots,$

$f^{(n)}(x)=-(n-1)!(2-x)^{-n}$. $f(0)=\log 2, f'(0)=-\dfrac{1}{2}, f''(0)=-\dfrac{1}{2^2},\cdots,f^{(n)}(0)=-\dfrac{(n-1)!}{2^n}$.

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)=\log 2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2!\cdot 2^2}x^2-\cdots-\dfrac{(n-1)!}{n!\cdot 2^n}x^n+o(x^n)$.

よって $\log(2-x)=\log 2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2\cdot 2^2}x^2-\cdots-\dfrac{1}{n\cdot 2^n}x^n+o(x^n)$.

7. 関数 $f(x)$ が $f'(a)=0$ のとき $f''(a)>0 \Rightarrow x=a$ で極小, $f''(a)<0 \Rightarrow x=a$ で極大.

(1) $f'(x)=\cos x-\dfrac{(1+x)'}{1+x}=\cos x-\dfrac{1}{1+x}$. $f'(0)=\cos 0-1=1-1=0$.

(2) $f''(x)=-\sin x-(-1)(1+x)^{-2}(1+x)'=-\sin x+\dfrac{1}{(1+x)^2}$. $f''(0)=-\sin 0+1=1>0$.

よって $f(x)$ は $x=0$ で極小値をとる.

8. (1) $f'(x)=\dfrac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{1}{2}}(1+2x)'-4\cdot\dfrac{1}{2}(4+x)^{-\frac{1}{2}}(4+x)'=\dfrac{2}{2\sqrt{1+2x}}-\dfrac{4}{2\sqrt{4+x}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}-\dfrac{2}{\sqrt{4+x}}$.

$f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}=\dfrac{2}{\sqrt{4+x}} \Rightarrow \sqrt{4+x}=2\sqrt{1+2x} \Rightarrow 4+x=4(1+2x) \Rightarrow 0=-7x \Rightarrow x=0$.

(2) $f''(x)=-\dfrac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{3}{2}}(1+2x)'-2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)(4+x)^{-\frac{3}{2}}(4+x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{(1+2x)^3}}+\dfrac{1}{\sqrt{(4+x)^3}}$.

$f''(0)=-1+\dfrac{1}{8}=-\dfrac{7}{8}<0$. よって $f(x)$ は $x=0$ で極大で極大値は $f(0)=1-8=-7$.

9. (1) 与式 $=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2+3n+1-n^3}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+3n+1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=3$.

(2) 与式 $=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=5$.

(3) 与式 $=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{1}{n}}}{1+\frac{2}{\sqrt{n}}}=\sqrt{2}$.

(4) 与式 $=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$

$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=1$.

10. 等比数列 $\{r^n\}$ は $r>1$ のとき ∞ に発散, $r=1$ のとき 1 に収束, $|r|<1$ のとき 0 に収束, $r\leqq -1$ のとき発散 (振動)

(1) $|r|=\left|-\dfrac{1}{3}\right|=\dfrac{1}{3}<1$. よって 0 に収束.

(2) $|r|=\left|\cos\dfrac{2}{3}\pi\right|=\left|-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}<1$. よって 0 に収束.

(3) $r=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}>1$. よって ∞ に発散.

(4) $a_n=\left(\dfrac{5}{3}\right)^n$ より $r=\dfrac{5}{3}>1$. よって ∞ に発散.

11. (1) 右辺 $=\dfrac{n+2}{(n+1)(n+2)}-\dfrac{n+1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{(n+2)-(n+1)}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n^2+3n+2}=$ 左辺

(2) (1) より $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+3k+2}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2}$. よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}$. 従って級数は収束し, 和は $\dfrac{1}{2}$.

12. 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束すれば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$. よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$ ならば級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散する (収束しない).

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{10n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{10+\frac{1}{n}}=\frac{1}{10}\neq 0$. よって級数は発散する.

13. 等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$ $(a\neq 0)$ は $|r|<1$ のときに限り収束し, 和は $\dfrac{a}{1-r}$.

(1) $a=-1, r=-\dfrac{1}{3}$. よって $|r|=\dfrac{1}{3}<1$ より級数は収束し, 和は $\dfrac{-1}{1-(-\frac{1}{3})}=-\dfrac{3}{4}$.

(2) $a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}, r=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. よって $|r|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}<1$ より級数は収束し,

和は $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

(3) $a=e, r=e$. よって $|r|=e>1$ より級数は発散する.

(4) $a=3, r=0.3$. よって $|r|=0.3<1$ より級数は収束し, 和は $\dfrac{3}{1-0.3}=\dfrac{30}{7}$.

14. 点 P の座標は $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\cdots+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots$. よって $a=1, r=-\dfrac{1}{2}$ の等比級数. 従って

$|r|=\dfrac{1}{2}<1$ より収束し, 和は $\dfrac{1}{1-(-\frac{1}{2})}=\dfrac{2}{3}$. よって点 P は座標 $\dfrac{2}{3}$ の点に近づく.

点 P が動く距離の和は $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots$. よって $a=1, r=\dfrac{1}{2}$ の等比級数. 従って

$|r|=\dfrac{1}{2}<1$ より収束し, 和は $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$. よって点 P が動く距離の和は 2.

15. $a=1, r=-\dfrac{1}{3}x$ の等比級数. よって $|r|=\left|\dfrac{1}{3}x\right|<1$, すなわち $|x|<3$ のときに限り収束. 和は $\dfrac{1}{1-(-\frac{1}{3}x)}=\dfrac{3}{3+x}$.

16. 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$.

$f'(x)=-(2-x)^{-2}(2-x)'=(2-x)^{-2}, f''(x)=-2(2-x)^{-3}(2-x)'=2(2-x)^{-3},\cdots,$

$f^{(n)}(x)=2\cdot 3\cdots n(2-x)^{-(n+1)}=n!(2-x)^{-(n+1)}$. $f(0)=\dfrac{1}{2}, f'(0)=\dfrac{1}{4}, f''(0)=\dfrac{2}{8},\cdots, f^{(n)}(0)=\dfrac{n!}{2^{n+1}}$.

よって $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}x+\dfrac{2}{2!\cdot 8}x^2+\cdots+\dfrac{n!}{n!\cdot 2^{n+1}}x^n+\cdots$.

従って $\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{8}x^2+\cdots+\dfrac{1}{2^{n+1}}x^n+\cdots$.

(収束は $r=\dfrac{1}{2}x$ の等比級数だから $|r|=\left|\dfrac{1}{2}x\right|<1$, すなわち $|x|<2$ のとき)

17. オイラーの公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

(1) 証明 オイラーの公式より $e^{i(-x)}=\cos(-x)+i\sin(-x)=\cos x-i\sin x$. よって左辺 $=(e^{i(-x)})^n$.

$(e^z)^n=e^{nz}$ (z は複素数, n は自然数) が成り立つから左辺 $=e^{i(-nx)}$. オイラーの公式より

左辺 $=\cos(-nx)+i\sin(-nx)=\cos nx-i\sin nx=$ 右辺//

(2) 証明 オイラーの公式より左辺 $=\cos(x+2\pi)+i\sin(x+2\pi)=\cos x+i\sin x$. よってオイラーの公式より

左辺 $=e^{ix}=$ 右辺//

18. $(e^{\alpha x})'=\alpha e^{\alpha x}$ (α は複素数).

(1) $(e^{(4+5i)x})'=(4+5i)e^{(4+5i)x}$.

(2) $(e^{\frac{x}{i}})'=\dfrac{1}{i}e^{\frac{x}{i}}=\dfrac{i}{i^2}e^{\frac{x}{i}}=-ie^{\frac{x}{i}}$.

(3) $(e^{3x}e^{-ix})'=(e^{(3-i)x})'=(3-i)e^{(3-i)x}=(3-i)e^{3x}e^{-ix}$.

(4) $\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)'=\dfrac{(e^{ix})'+(e^{-ix})'}{2}=\dfrac{ie^{ix}-ie^{-ix}}{2}=\dfrac{i(e^{ix}+e^{-ix})}{2}\left(=-\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2i}\right)$.

p.5 CHECK

19. (1) $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}=(1-x)^{-2}$ とおくと $f'(x)=-2(1-x)^{-3}(1-x)'=2(1-x)^{-3}, f''(x)=-6(1-x)^{-4}(1-x)'$

$=6(1-x)^{-4}, f'''(x)=-24(1-x)^{-5}(1-x)'=24(1-x)^{-5}$. $f(0)=1, f'(0)=2, f''(0)=6, f'''(0)=24$.

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}+\dfrac{f'''(0)}{3!}+o(x^3)=1+2x+\dfrac{6}{2}x^2+\dfrac{24}{6}x^3+o(x^3)=1+2x+3x^2+4x^3+o(x^3)$.

(2) $f(x)=\sin 2x$ とおくと $f'(x)=2\cos 2x, f''(x)=-4\sin 2x, f'''(x)=-8\cos 2x$. $f(0)=0, f'(0)=2,$

$f''(0)=0, f'''(0)=-8$.

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}+\dfrac{f'''(0)}{3!}+o(x^3)=0+2x+0-\dfrac{8}{6}x^3+o(x^3)=2-\dfrac{4}{3}x^3+o(x^3)$.

20. $f'(x)=\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\log x+1$. $f'(x)=0\Rightarrow\log x=-1\Rightarrow x=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$.

$f''(x)=\dfrac{1}{x}$. $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=e>0$. よって $f(x)$ は $x=\dfrac{1}{e}$ のとき極小値 $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}\log\dfrac{1}{e}=-\dfrac{1}{e}$ をとる.

21. (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{1-3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\frac{1}{n}-3}=-\infty$. 発散.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n-1}-\frac{n^2}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)-n^2(n-1)}{(n-1)(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{n^2}}=2$. 収束.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+4}{4^n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^n}{4^n}+\frac{4}{4^n}}{1+\frac{3}{4^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{3}{4})^n+\frac{4}{4^n}}{1+\frac{3}{4^n}}=\frac{0+0}{1+0}=0$. 収束.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log\frac{n}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\log\frac{1}{1+\frac{3}{n}}=\log 1=0$. 収束.

22. (1) 公比 $r=-\dfrac{3}{5}, |r|=\dfrac{3}{5}<1$. よって 0 に収束.

(2) 公比 $r=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, |r|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1$. よって 0 に収束.

(3) 公比 $r=\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}=\dfrac{\sqrt{3}+2}{3-4}=-\sqrt{3}-2<-1$. よって発散 (振動).

(4) 公比 $r=\dfrac{e}{2}=\dfrac{2.718\cdots}{2}>1$. よって ∞ に発散.

23. (1) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right\}=\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\cdots+\left\{\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right\}=1-\frac{1}{(n+1)!}$.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=1$ より収束. 和は 1.

(2) $a_n=\log_{10}\dfrac{10n+2}{n+1}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\log\frac{10+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\log_{10}10=1\neq 0$. よって級数は発散.

24. (1) 初項 $a=1$, 公比 $r=-\dfrac{2}{5}$. $|r|=\dfrac{2}{5}<1$ より収束. 和は $\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{1}{1-(-\frac{2}{5})}=\dfrac{5}{7}$.

(2) 初項 $a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, 公比 $r=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. $|r|=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\sqrt{\dfrac{12}{9}}=\sqrt{\dfrac{4}{3}}>1$ より発散.

(3) 初項 $a=1$, 公比 $r=\dfrac{1}{\pi}$. $|r|=\dfrac{1}{\pi}<1$ より収束. 和は $\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{\pi}}=\dfrac{\pi}{\pi-1}$.

(4) 初項 $a=2$, 公比 $r=-0.1$. $|r|=0.1<1$ より収束. 和は $\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{2}{1-(-0.1)}=\dfrac{20}{11}$.

25. (1) $f(x)=\dfrac{1}{2+x}=(2+x)^{-1}$ とおくと $f'(x)=-(2+x)^{-2}(2+x)'=-(2+x)^{-2}$, $f''(x)=2(2+x)^{-3}(1+x)'$

$=2(2+x)^{-3},\cdots,f^{(n)}(x)=(-1)\cdot(-2)\cdots(-n)(2+x)^{-n-1}=(-1)^n n!(2+x)^{-n-1}$.

$f(0)=\dfrac{1}{2}$, $f'(0)=-2^{-2}=-\dfrac{1}{4}$, $f''(0)=2\cdot2^{-3}=\dfrac{1}{4},\cdots,f^{(n)}(0)=(-1)^n n!2^{-n-1}=(-1)^n\dfrac{n!}{2^{n+1}}$.

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{8}x^2+\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{2^{n+1}}x^n+\cdots$.

$\Big(r=-\dfrac{1}{2}x$ を公比とする等比級数だから $|r|=\left|-\dfrac{1}{2}x\right|<1$ すなわち $|x|<2$ のときに限り収束$\Big)$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{1+2x}=(1+2x)^{-1}$ とおくと $f'(x)=-(1+2x)^{-2}(1+2x)'=-2(1+2x)^{-2}$, $f''(x)=4(1+2x)^{-3}(1+2x)'$

$=8(1+2x)^{-3},\cdots,f^{(n)}(x)=(-1)\cdot(-2)\cdots(-n)2^n(1+2x)^{-n-1}=(-1)^n n!2^n(1+2x)^{-n-1}=(-2)^n n!(1+2x)^{-n-1}$.

$f(0)=1$, $f'(0)=-2$, $f''(0)=8,\cdots,f^{(n)}(0)=(-2)^n n!$.

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots=1-2x+4x^2+\cdots+(-2)^n x^n+\cdots$.

$\Big(r=-2x$ を公比とする等比級数だから $|r|=|-2x|<1$ すなわち $|x|<\dfrac{1}{2}$ のときに限り収束$\Big)$

26. (1) オイラーの公式より左辺 $=\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi=1$.

(2) オイラーの公式より左辺 $=\cos(2n+1)\pi+i\sin(2n+1)\pi=-1$.