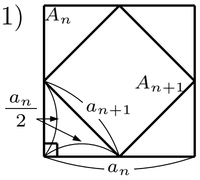
大日本図書　新微分積分 II 問題集　1 章§ 1 STEPUP 詳しい解答

p.6. 1 章§ 1. 関数の展開　STEPUP

27. (1)



正方形 A_n の 1 辺の長さを a_n とすると右図より $\left(\dfrac{a_n}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a_n}{2}\right)^2=a_{n+1}^2$ より $a_{n+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a_n$.

$a_1=a$ だから $a_n=a\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}, l_n=4a_n=4a\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1},$

$$\sum_{k=1}^{\infty}l_n=4a\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}=\frac{4a}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=4a(2+\sqrt{2}).$$

(2) $S_n=a_n^2=\left\{a\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\right\}^2=a^2\left\{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right\}^{n-1}=a^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}.$

$$\sum_{k=1}^{\infty}S_n=a^2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{a^2}{1-\frac{1}{2}}=2a^2.$$

28. (1) $f(x)=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$ とおくと $f'(x)=-x^{-2}, f''(x)=2x^{-3},\cdots,f^{(n)}(x)=(-1)(-2)\cdots(-n)x^{-n-1}=(-1)^n n!x^{-n-1}$

$f(1)=1, f'(1)=-1, f''(1)=2,\cdots,f^{(n)}(1)=(-1)^n n!.$

$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\dfrac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n+\cdots.$

$\dfrac{1}{x}=1-(x-1)+(x-1)^2+\cdots+(-1)^n(x-1)^n+\cdots.$

(公比 $-(x-1)$ の等比級数だから $|-(x-1)|<1$, すなわち $|x-1|<1$ のときに限り収束)

(2) $f(x)=\log x$ とおくと $f'(x)=\dfrac{1}{x}=x^{-1}, f''(x)=-x^{-2},\cdots,f^{(n)}(x)=(-1)(-2)\cdots\{-(n-1)\}x^{-n}$

$=(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}.$　$f(1)=\log 1=0, f'(1)=1, f''(1)=-1,\cdots,f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}(n-1)!.$

$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\dfrac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n+\cdots.$

$\log x=(x-1)-\dfrac{1}{2}(x-1)^2+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}(x-1)^n+\cdots.$

29. 部分分数分解 $\dfrac{1}{k(k+2)}=\dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k+2}$ (k の恒等式) を考えると $1=a(k+2)+bk$. $k=0$ のとき $1=2a$ より $a=\dfrac{1}{2}$,

$k=-2$ のとき $1=-2b$ より $b=-\dfrac{1}{2}$. よって $\dfrac{1}{k(k+2)}=\dfrac{\frac{1}{2}}{k}+\dfrac{-\frac{1}{2}}{k+2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)$. 従って

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}.$$

$=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$. よって

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}.$$

30. (1) 左辺 $=\{e^{-x}f(x)\}'=(e^{-x})'f(x)+e^{-x}f'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)=e^{-x}\{-f(x)+f'(x)\}$.

よって仮定 $f'(x)=f(x)$ より左辺 $=0=$ 右辺//

$\{e^{-x}f(x)\}'=0$ より $e^{-x}f(x)=C$ (定数). $x=0$ のとき $e^0f(0)=f(0)=C$. $f(0)=1$ より $C=1$.

よって $e^{-x}f(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}=1$. 従って $f(x)=e^x$.

(2) (1) より $f(x)=e^x$. よって $f(x)=f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x, f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)$

$=e^0=1$. 従って $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots=1+x+\dfrac{1}{2}x^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}x^n+\cdots.$

(3) (2) より $e^{-1}=f(-1)=1-1+\dfrac{1}{2!}(-1)^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}(-1)^n+\cdots=\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{n!}+\cdots$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right\}=e^{-1}$. 従って $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log\left\{\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right\}=\log e^{-1}$

$=-\log e=-1.$

31. (1) オイラーの公式より $e^{-\frac{\pi}{2}i}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-i.$

(2) $e^{3+\frac{3}{4}\pi i} = e^3 e^{\frac{3}{4}\pi i} = e^3\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) = e^3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{e^3}{\sqrt{2}} + \frac{e^3}{\sqrt{2}}i.$

(3) $\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right)^5 = (e^{\frac{\pi}{10}i})^5 = e^{\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i.$

(4) $\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^3 = \left\{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right\}^3 = (e^{-\frac{2\pi}{3}i})^3 = e^{-2\pi} = \cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi) = 1.$

32. (1) $x(3-4x)$ を公比とする等比級数だから $|x(3-4x)| < 1$, すなわち $-1 < x(3-4x) < 1$ のときに限り収束.

$-1 < x(3-4x)$ より $-x(3-4x) - 1 = 4x^2 - 3x - 1 = (4x+1)(x-1) < 0$. よって $-\frac{1}{4} < x < 1 \cdots$①.

$x(3-4x) < 1$ より $-x(3-4x) + 1 = 4x^2 - 3x + 1 > 0 \cdots$②.

$4x^2 - 3x + 1 = 4\left(x^2 - \frac{3}{4}x\right) + 1 = 4\left\{\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2\right\} + 1 = 4\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{7}{16}$ より②は常になりたつから

①より収束する x の範囲は $-\frac{1}{4} < x < 1$. 和は $\frac{1}{1 - x(3-4x)} = \frac{1}{4x^2 - 3x + 1}$.

(2) $\frac{1}{1+x}$ を公比とする等比級数だから $\left|\frac{1}{1+x}\right| < 1 \Leftrightarrow |1+x| > 1$ のときに限り収束. よって収束する x の範囲は

$1 + x < -1, 1 < 1 + x \Leftrightarrow x < -2, 0 < x$.

和は $\frac{1}{1 - \frac{1}{1+x}} = \frac{1+x}{1+x-1} = \frac{1+x}{x}$.

33. (1) $f(x) = \cos^{-1} x$ とおくと $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$,

$f''(x) = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(1-x^2)' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) = -x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$,

$f'''(x) = -(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} - x\left(-\frac{3}{2}\right)(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}(1-x^2)' = -(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3x}{2}(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}(-2x)$

$= -(1-x^2)(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} - 3x^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} = -(1+2x^2)(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}$.

$f(0) = \cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}, f'(0) = -1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1$. $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$

より $\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{-1}{3!}x^3 + \cdots = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots$

(2) $f(x) = \tan^{-1} x$ とおくと $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}, f''(x) = -(1+x^2)^{-2}(1+x^2)' = -2x(1+x^2)^{-2}$,

$f'''(x) = -2(1+x^2)^{-2} - 2x\cdot(-2)(1+x^2)^{-3}(1+x^2)' = -2(1+x^2)^{-2} + 4x(1+x^2)^{-3}\cdot 2x$

$= -2(1+x^2)(1+x^2)^{-3} + 8x^2(1+x^2)^{-3} = (-2+6x^2)(1-x^2)^{-3}$.

$f(0) = \tan^{-1} 0 = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -2$. $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$ より

$\tan^{-1} x = x + \frac{-2}{3!}x^3 + \cdots = x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots$

34. (1) $(\sinh x)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}\{e^x - (-e^{-x})\} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$.

$(\cosh x)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$.

(2) $f(x) = \sinh x$ とおくと (1) より $f'(x) = f'''(x) = f^{(5)}(x) = \cosh x, f''(x) = f^{(4)}(x) = \sinh x$.

$\sinh 0 = \frac{1}{2}(e^0 - e^0) = 0, \cosh 0 = \frac{1}{2}(e^0 + e^0) = 1$ より $f(0) = f''(0) = f^{(4)}(0) = 0, f'(0) = f'''(0) = f^{(5)}(0) = 1$.

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \cdots$ より $\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$

同様に $g(x) = \cosh x$ とおくと $g'(x) = g'''(x) = g^{(5)}(x) = \sinh x, g''(x) = g^{(4)}(x) = \cosh x$.

$g(0) = g''(0) = g^{(4)}(0) = 1, g'(0) = g'''(0) = g^{(5)}(0) = 0$. $\cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$

(3) 右辺 $= \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha})\cdot\frac{1}{2}(e^\beta + e^{-\beta}) + \frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha})\frac{1}{2}(e^\beta - e^{-\beta})$

$= \frac{1}{4}(e^{\alpha+\beta} + e^{\alpha-\beta} - e^{-\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta}) + \frac{1}{4}(e^{\alpha+\beta} - e^{\alpha-\beta} + e^{-\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta}) = \frac{1}{4}(2e^{\alpha+\beta} - 2e^{-\alpha-\beta})$

$= \frac{1}{2}(e^{\alpha+\beta} - e^{-(\alpha+\beta)}) =$ 左辺//

p.8　PLUS

1 循環小数

35. (1) $0.\dot{7} = 0.7 + 0.07 + 0.007 + \cdots = 0.7 + 0.7 \times 0.1 + 0.7 \times 0.1^2 + \cdots = \dfrac{0.7}{1-0.1} = \dfrac{7}{9}$.

(2) $0.\dot{0}\dot{3} = 0.03 + 0.0003 + 0.000003 + \cdots = 0.03 + 0.03 \times 0.01 + 0.03 \times 0.01^2 + \cdots = \dfrac{0.03}{1-0.01}$

$= \dfrac{3}{99} = \dfrac{1}{33}$.

(3) $0.\dot{6}5\dot{4} = 0.654 + 0.000654 + 0.000000654 + \cdots = 0.654 + 0.654 \times 0.001 + 0.654 \times 0.001^2 + \cdots = \dfrac{0.654}{1-0.001} =$

$\dfrac{654}{999} = \dfrac{218}{333}$.

(4) $0.25\dot{3} = 0.25 + 0.003 + 0.0003 + 0.00003 + \cdots = 0.25 + 0.003 + 0.003 \times 0.1 + 0.003 \times 0.1^2 + \cdots = \dfrac{25}{100} + \dfrac{0.003}{1-0.1}$

$= \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{900} = \dfrac{19}{75}$.

(5) $0.2\dot{4}\dot{3} = 0.2 + 0.043 + 0.00043 + 0.0000043 + \cdots = 0.2 + 0.043 + 0.043 \times 0.01 + 0.043 \times 0.01^2 + \cdots = 0.2 + \dfrac{0.043}{1-0.01}$

$= \dfrac{1}{5} + \dfrac{43}{990} = \dfrac{241}{990}$.

(6) $3.\dot{1}\dot{2} = 3 + 0.12 + 0.0012 + 0.000012 + \cdots = 3 + 0.12 + 0.12 \times 0.01 + 0.12 \times 0.01^2 + \cdots = 3 + \dfrac{0.12}{1-0.01}$

$= 3 + \dfrac{12}{99} = \dfrac{103}{33}$.

36. $0.\dot{q}\dot{p} = 0.qp + 0.00qp + 0.0000qp + \cdots = 0.qp + 0.qp \times 0.01 + 0.qp \times 0.01^2 + \cdots = \dfrac{0.qp}{1-0.01} = \dfrac{10q+p}{99}$. よって

$\dfrac{q}{p} \leqq \dfrac{10q+p}{99}$ より $99q \leqq 10pq + p^2 \Rightarrow 99q - 10pq = (99-10p)q \leqq p^2 \Rightarrow q \leqq \dfrac{p^2}{99-10p}$ (仮定より $q > 0, 99-p > 0$).

$p = 9$ のとき $\dfrac{p^2}{99-10p} = 9$. $1 \leqq q < p$ より $1 \leqq q \leqq 8$.

$p = 8$ のとき $\dfrac{p^2}{99-10p} = \dfrac{64}{19} = 3.3\cdots$. $1 \leqq q < p$ より $q = 1, 2, 3$.

$p = 7$ のとき $\dfrac{p^2}{99-10p} = \dfrac{49}{29} = 1.6\cdots$. $1 \leqq q < p$ より $q = 1$.

$p = 6$ のとき $\dfrac{p^2}{99-10p} = \dfrac{36}{39} = 0.9\cdots$. $1 \leqq q < p$ より解なし. $1 \leqq p \leqq 5$ も同様に解なし.

以上により $(p,q) = (9,8), (9,7), (9,6), (9,5), (9,4), (9,3), (9,2), (9,1), (8,3), (8,2), (8,1), (7,1)$.

2 マクローリン展開による計算

37. (1) $\sin x = x - \dfrac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots, \cos x = 1 - \dfrac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$. よって

$\sin x + \cos x = 1 + x - \dfrac{1}{2!}x^2 - \dfrac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{(2n)!}x^{2n} + (-1)^n \dfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$.

(2) $\sin x^2 = x^2 - \dfrac{1}{3!}x^6 + \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{(2n+1)!}x^{4n+2} + \cdots$. よって

$x \sin x^2 = x^3 - \dfrac{1}{3!}x^7 + \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{(2n+1)!}x^{4n+3} + \cdots$.

(3) $e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{24}x^4 + \cdots, \cos x = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{24}x^4 - \cdots$. よって

$$e^x \cos x = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots\right) + x\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots\right) + \frac{1}{2}x^2\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots\right)$$

$$+\frac{1}{6}x^3\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots\right) + \frac{1}{24}x^4\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots\right) + \cdots.$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots$$

$$= 1 + x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \cdots.$$

(4) $e^x - 1 = x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{24}x^4 + \cdots, \cos x = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{24}x^4 - \cdots$. よって

$$\cos(e^x - 1) = 1 - \frac{1}{2}(e^x - 1)^2 + \frac{1}{24}(e^x - 1)^4 - \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots)^2 + \frac{1}{24}(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots)^4 - \cdots$$

$= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$

(5) $\frac{1}{1+x^3} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots$ とすると

$1 = (1+x^3)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots)$

$= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots) + x^3(a_0 + a_1x + a_2x^2a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots)$

$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + (a_3 + a_0)x^3 + (a_4 + a_1)x^4 + \cdots$. よって

$a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 + a_0 = 0, a_4 + a_1 = 0, \cdots$ より $a_0 = 1, a_1 = a_2 = 0, a_3 = -1, a_4 = a_5 = 0, a_6 = 1, \cdots$,

すなわち $a_{3k} = (-1)^k$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$, それ以外は 0.

よって $\frac{1}{1+x^3} = 1 - x^3 + x^6 + \cdots + (-1)^n x^{3n} + \cdots$.

(6) $4x + 1 = \frac{4}{3}(3x-2) + \frac{11}{3}$ より $\frac{4x+1}{3x-2} = \frac{4}{3} + \frac{11}{3(3x-2)}$.

$\frac{1}{3x-2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ とおくと

$1 = (3x-2)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) = 3x(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) - 2(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)$

$= -2a_0 + (3a_0 - 2a_1)x + (3a_1 - 2a_2)x^2 + (3a_2 - 2a_3)x^3 + \cdots$. よって

$-2a_0 = 1, 3a_0 - 2a_1 = 0, 3a_1 - 2a_2 = 0, 3a_2 - 2a_3 = 0, \cdots$ より $a_0 = -\frac{1}{2}, a_1 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}, a_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2, \cdots$,

よって $\frac{1}{3x-2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2x^2 - \cdots - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n x^n - \cdots$. 従って

$\frac{4x+1}{3x-2} = \frac{4}{3} - \frac{11}{6} - \frac{11}{6}\cdot\frac{3}{2}x - \frac{11}{6}\left(\frac{3}{2}\right)^2x^2 - \cdots - \frac{11}{6}\left(\frac{3}{2}\right)^n x^n - \cdots$.

$= -\frac{1}{2} - \frac{11}{6}\cdot\frac{3}{2}x - \frac{11}{6}\left(\frac{3}{2}\right)^2x^2 - \cdots - \frac{11}{6}\left(\frac{3}{2}\right)^n x^n - \cdots$.

(7) $\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$(部分分数分解). (5)(6) と同様にして

$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2x^2 - \cdots - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n - \cdots, \frac{1}{x-1} = -1 - x - x^2 - \cdots - x^n - \cdots$. よって

$\frac{1}{x^2-3x+2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2x^2 - \cdots - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n - \cdots - \{-1 - x - x^2 - \cdots - x^n - \cdots\}$

$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}x + \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}x^2 + \cdots + \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}x^n + \cdots$

$= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}x^2 + \cdots + \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}x^n + \cdots$.

38. 例題の x, y にそれぞれ ix, iy を代入して $e^{ix}e^{iy} = e^{ix+iy} = e^{i(x+y)}$. オイラーの公式より

$e^{ix} = \cos x + i\sin x, e^{iy} = \cos y + i\sin y, e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i\sin(x+y)$. よって

$(\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) = \cos(x+y) + i\sin(x+y)$.

左辺 $= \cos x\cos y + i\cos x\sin y + i\sin x\cos y + i^2\sin x\sin y = \cos x\cos y + i\cos x\sin y + i\sin x\cos y - \sin x\sin y$

$= (\cos x\cos y - \sin x\sin y) + i(\sin x\cos y + \cos x\sin y)$. 両辺の実部と虚部がそれぞれ等しいので

$\cos x\cos y - \sin x\sin y = \cos(x+y), \sin x\cos y + \cos x\sin y = \sin(x+y)//$

39. $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ とおくと $f(-x) = \frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x} = f(x)$. よって $\frac{1}{\cos x} =$ は偶関数. 従って例題より

$\frac{1}{\cos x} = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots$ とおくと $1 = \cos x(a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots)$. $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots$ より

$1 = (1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots)(a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots)$

$= (a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots) - \frac{1}{2}x^2(a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots) + \frac{1}{24}x^4(a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots) - \cdots$

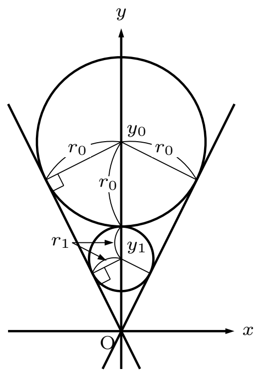
$= a_0 + \left(a_2 - \frac{1}{2}a_0\right)x^2 + \left(a_4 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{24}a_0\right)x^4 + \cdots$.

よって $1 = a_0, 0 = a_2 - \frac{1}{2}a_0, 0 = a_4 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{24}a_0$ より $a_0 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{24}a_0 = \frac{5}{24}$.

よって $\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \cdots$.

3 発展問題

40. (1) $A: mx-y=0, B: mx+y=0$ より直線 A, B と $(0, y_0)$ の距離はそれぞれ
$\dfrac{|0-y_0|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \dfrac{|y_0|}{\sqrt{m^2+1}}, \dfrac{|0+y_0|}{\sqrt{m^2+1^2}} = \dfrac{|y_0|}{\sqrt{m^2+1}}$ で等しく，これらは半径 r_0 に等しい.
また条件より $y_0>0$ だから $\dfrac{y_0}{\sqrt{m^2+1}} = r_0$. よって $y_0 = r_0\sqrt{m^2+1}$, 中心は $(0, r_0\sqrt{m^2+1})$.



(2) この半径 r_1 の円の中心を $(0, y_1)$ とおくと (1) と同様に $y_1 = r_1\sqrt{m^2+1}$. 右図のように
$y_0 - y_1 = r_0 + r_1$ だから $r_0\sqrt{m^2+1} - r_1\sqrt{m^2+1} = r_0 + r_1$. よって $r_1 = \dfrac{\sqrt{m^2+1}-1}{\sqrt{m^2+1}+1} r_0$.

(3) 各円の半径を順に $r_0, r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$ とすれば (2) と同様に $r_{n+1} = \dfrac{\sqrt{m^2+1}-1}{\sqrt{m^2+1}+1} r_n$.
よって r_n は等比数列となり $r_n = \left(\dfrac{\sqrt{m^2+1}-1}{\sqrt{m^2+1}+1}\right)^n r_0 = \left(\dfrac{\sqrt{m^2+1}-1}{\sqrt{m^2+1}+1}\right)^n$ $(r_0 = 1$ とした$)$. 従って求める円の面積の総和は $\pi\cdot 1^2 + \pi\left(\dfrac{\sqrt{m^2+1}-1}{\sqrt{m^2+1}+1}\right)^2 + \pi\left(\dfrac{\sqrt{m^2+1}-1}{\sqrt{m^2+1}+1}\right)^4 + \cdots + \pi\left(\dfrac{\sqrt{m^2+1}-1}{\sqrt{m^2+1}+1}\right)^{2n} + \cdots$

$$= \pi\cdot\frac{1}{1-(\frac{\sqrt{m^2+1}-1}{\sqrt{m^2+1}+1})^2} = \frac{\pi(\sqrt{m^2+1}+1)^2}{(\sqrt{m^2+1}+1)^2 - (\sqrt{m^2+1}-1)^2}$$

$$= \frac{\pi(\sqrt{m^2+1}+1)^2}{(m^2+1+2\sqrt{m^2+1}+1)-(m^2+1-2\sqrt{m^2+1}+1)} = \frac{\pi(\sqrt{m^2+1}+1)^2}{4\sqrt{m^2+1}}.$$

41. $e^x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ だから $\dfrac{e^x}{x^\alpha} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{x^n}{x^\alpha}$. $n<\alpha$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\alpha-n}} = 0$, $n=\alpha$ ならば $\dfrac{x^n}{x^\alpha} = 1$,
$n>\alpha$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty}x^{n-\alpha} = \infty$. $\dfrac{1}{n!} > 0$ だから $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^\alpha} = \infty$.

42. (1) オイラーの公式より $\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \dfrac{(\cos\theta + i\sin\theta) - \{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}}{2i} = \dfrac{(\cos\theta + i\sin\theta) - (\cos\theta - i\sin\theta)}{2i}$
$= \dfrac{2i\sin\theta}{2i} = \sin\theta$.

(2) (1) より $\sin^3\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \dfrac{e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta}}{8i^3} = \dfrac{e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}}{-8i}$
$= \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} - \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}}{2i} = \dfrac{3}{4}\sin\theta - \dfrac{1}{4}\sin 3\theta$. よって $a = \dfrac{3}{4}, b = -\dfrac{1}{4}$.