大日本図書　新微分積分 II 問題集　2 章§ 1 STEPUP 詳しい解答

p.15. 2 章§ 1. 偏微分法　STEPUP

63. (1) z_x について $y=b$ (定数) とおくと $z=x^b$. $(x^b)'=bx^{b-1}$. $b=y$ として $z_x=yx^{y-1}$.

z_y について $x=a$ (定数) とおくと $z=a^y$. $(a^y)'=a^y\log a$ (指数関数の微分の公式, 教科書 p.176) $a=x$ として

$z_y=x^y\log x$.

(2) 底の変換公式より $z=\dfrac{\log y}{\log x}, z_x=(\log y)\{-(\log x)^{-2}\}(\log x)'=-\dfrac{\log y}{x(\log x)^2}, z_y=\dfrac{\frac{1}{y}}{\log x}=\dfrac{1}{y\log x}$.

(3) $z=\dfrac{1}{\cos xy}=(\cos xy)^{-1}, z_x=-(\cos xy)^{-2}(\cos xy)_x=-\dfrac{(-\sin xy)(xy)_x}{\cos^2 xy}=\dfrac{y\sin xy}{\cos^2 xy}, z_y=-(\cos xy)^{-2}(\cos xy)_y$

$=-\dfrac{(-\sin xy)(xy)_y}{\cos^2 xy}=\dfrac{x\sin xy}{\cos^2 xy}$. $\left(\dfrac{\sin xy}{\cos^2 xy}=\dfrac{1}{\cos xy}\cdot\dfrac{\sin xy}{\cos xy}=\sec xy\tan xy\right.$ とも変形できる$\left.\right)$

(4) $z_x=\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{y})^2}}\cdot\left(\dfrac{x}{y}\right)_x=\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$,

$z_y=\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{y})^2}}\cdot\left(\dfrac{x}{y}\right)_y=\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\cdot x(-y^{-2})=\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)=-\dfrac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$.

(5) $z_x=\dfrac{1}{1+(\frac{2xy}{x^2-y^2})^2}\cdot\left(\dfrac{2xy}{x^2-y^2}\right)_x=\dfrac{1}{1+\frac{4x^2y^2}{(x^2-y^2)^2}}\cdot\dfrac{2y(x^2-y^2)-2xy\cdot 2x}{(x^2-y^2)^2}=\dfrac{2y(x^2-y^2-2x^2)}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}$

$=-\dfrac{2y(x^2+y^2)}{x^4-2x^2y^2+y^4+4x^2y^2}=-\dfrac{2y(x^2+y^2)}{x^4+2x^2y^2+y^4}=-\dfrac{2y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}=-\dfrac{2y}{x^2+y^2}$,

$z_y=\dfrac{1}{1+(\frac{2xy}{x^2-y^2})^2}\cdot\left(\dfrac{2xy}{x^2-y^2}\right)_y=\dfrac{1}{1+\frac{4x^2y^2}{(x^2-y^2)^2}}\cdot\dfrac{2x(x^2-y^2)-2xy\cdot(-2y)}{(x^2-y^2)^2}=\dfrac{2x(x^2-y^2+2y^2)}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}$

$=\dfrac{2x(x^2+y^2)}{x^4-2x^2y^2+y^4+4x^2y^2}=\dfrac{2x(x^2+y^2)}{x^4+2x^2y^2+y^4}=\dfrac{2x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$.

(6) $z=\dfrac{1}{\sin\sqrt{x^2+y^2}}=(\sin\sqrt{x^2+y^2})^{-1}, z_x=-(\sin\sqrt{x^2+y^2})^{-2}(\sin\sqrt{x^2+y^2})_x$

$=-\dfrac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sin^2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(\sqrt{x^2+y^2})_x=-\dfrac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sin^2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(x^2+y^2)_x=-\dfrac{x\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}\sin^2\sqrt{x^2+y^2}}$,

$z_y=-(\sin\sqrt{x^2+y^2})^{-2}(\sin\sqrt{x^2+y^2})_y=-\dfrac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sin^2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(\sqrt{x^2+y^2})_y$

$=-\dfrac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sin^2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(x^2+y^2)_y=-\dfrac{y\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}\sin^2\sqrt{x^2+y^2}}$.

$\left(\dfrac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sin^2\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{1}{\sin\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sin\sqrt{x^2+y^2}}=\mathrm{cosec}\sqrt{x^2+y^2}\cot\sqrt{x^2+y^2}\right.$とも変形できる$\left.\right)$

64. 63(1) より $(x^y)_x=yx^{y-1}, (x^y)_y=x^y\log x$. 同様に $(y^x)_x=y^x\log y, (y^x)_y=xy^{x-1}$. よって

$z_x=yx^{y-1}y^x+x^yy^x\log y, z_y=x^y(\log x)y^x+x^y\cdot xy^{x-1}=x^yy^x\log x+xx^yy^{x-1}$. 従って

左辺 $=xyx^{y-1}y^x+xx^yy^x\log y+yx^yy^x\log x+xyx^yy^{x-1}=yx^yy^x+x^yy^x(x\log y)+x^yy^x(y\log x)+xx^yy^x$

$=x^yy^x(y+x\log y+y\log x+x)=x^yy^x(y+\log y^x+\log x^y+x)=x^yy^x(y+\log x^yy^x+x)$.

$z=x^yy^x$ より左辺 $=z(y+\log z+x)=z(x+y)+z\log z=$ 右辺//

65. 余弦定理より $z^2=x^2+y^2-2xy\cos 60^\circ=x^2-xy+y^2$. よって $z=\sqrt{x^2-xy+y^2}$.

$z_x=\dfrac{1}{2}(x^2-xy+y^2)^{-\frac{1}{2}}(x^2-xy+y^2)_x=\dfrac{2x-y}{2\sqrt{x^2-xy+y^2}}$,

$z_y=\dfrac{1}{2}(x^2-xy+y^2)^{-\frac{1}{2}}(x^2-xy+y^2)_y=\dfrac{-x+2y}{2\sqrt{x^2-xy+y^2}}$.

$\Delta z\fallingdotseq\dfrac{2x-y}{2\sqrt{x^2-xy+y^2}}\Delta x+\dfrac{-x+2y}{2\sqrt{x^2-xy+y^2}}\Delta y=\dfrac{2x-y}{2z}\Delta x+\dfrac{2y-x}{2z}\Delta y$.

66. (1) 与式 $\Leftrightarrow z^2=1-y^2, z\geqq 0\Leftrightarrow y^2+z^2=1, z\geqq 0$. よって yz 平面上の円周 $y^2+z^2=1$ 上の各点を通り, x 軸に平行な直線によって作られる円柱面の $z\geqq 0$ の部分.

(2) zx 平面上の放物線 $z=x^2$ 上の各点を通り, y 軸に平行な直線によって作られる曲面.

67. $y \neq 0$ のとき $f(0,y)=0$ だから y 軸 $(x=0)$ に沿って近づく場合 $\lim_{y\to 0} f(0,y)=0$.

曲線 $x=y^3$ に沿って近づく場合 $\lim_{y\to 0} f(y^3,y)=\lim_{x\to 0}\dfrac{y^6}{3y^6+y^6}=\dfrac{1}{3+1}=\dfrac{1}{4}$.

$(0,0)$ への近づき方によって極限が異なるから $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない.

68. (1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=f_x=y\sin\sqrt{x^2+y^2}+xy(\cos\sqrt{x^2+y^2})(\sqrt{x^2+y^2})_x$

$=y\sin\sqrt{x^2+y^2}+xy(\cos\sqrt{x^2+y^2})\cdot\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(x^2+y^2)_x=y\sin\sqrt{x^2+y^2}+\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\sqrt{x^2+y^2}$.

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=f_y=x\sin\sqrt{x^2+y^2}+xy(\cos\sqrt{x^2+y^2})(\sqrt{x^2+y^2})_y$

$=x\sin\sqrt{x^2+y^2}+xy(\cos\sqrt{x^2+y^2})\cdot\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(x^2+y^2)_y=x\sin\sqrt{x^2+y^2}+\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\sqrt{x^2+y^2}$.

(2) $f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{0-0}{h}=0$. $f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\dfrac{f(0,0+k)-f(0,0)}{h}=\lim_{k\to 0}\dfrac{0-0}{k}=0$.

(3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y=0$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x=0$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sin\sqrt{x^2+y^2}=\sin 0=0$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\cos\sqrt{x^2+y^2}=\cos 0=1$.

$\dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{\dfrac{1}{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}}}$ より $x\to 0, y\to 0$ のとき $\dfrac{1}{y^2}\to\infty, \dfrac{1}{x^2}\to\infty$ より $\dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\to 0$.

よって $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$. 従って $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cdot\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$,

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\cdot\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

(1)(2) と以上により $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)=0=f_x(0,0)$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y)=0=f_y(0,0)$.

よって $\dfrac{\partial f}{\partial x}=f_x, \dfrac{\partial f}{\partial y}=f_y$ は点 $(0,0)$ で連続である.