p.18. 2 章§ 2. 偏微分の応用　BASIC

69. (1) $z_x = 9x^2y^2 - 8xy^3, z_y = 6x^3y - 12x^2y^2.\quad z_{xx} = 18xy^2 - 8y^3, z_{xy} = 18x^2y - 24xy^2 = z_{yx}, z_{yy} = 6x^3 - 24x^2y.$

(2) $z_x = (x+y)^{-1} - (x-y)(x+y)^{-2}(x+y)_x = 2y(x+y)^{-2}, z_y = -(x+y)^{-1} - (x-y)(x+y)^{-2}(x+y)_y = -2x(x+y)^{-2}.$

$z_{xx} = 2y(-2)(x+y)^{-3}(x+y)_x = -\dfrac{4y}{(x+y)^3}, z_{xy} = 2(x+y)^{-2} + 2y(-2)(x+y)^{-3}(x+y)_y = \dfrac{2(x-y)}{(x+y)^3} = z_{yx},$

$z_{yy} = -2x(-2)(x+y)^{-3}(x+y)_y = \dfrac{4x}{(x+y)^3}.$

(3) $z_x = (\cos xy)(xy)_x = y\cos xy, z_y = (\cos xy)(xy)_y = x\cos xy.\quad z_{xx} = y(-\sin xy)(xy)_x = -y^2\sin xy,$

$z_{xy} = \cos xy + y(-\sin xy)(xy)_y = \cos xy - xy\sin xy = z_{yx}, z_{yy} = x(-\sin xy)(xy)_y = -x^2\sin xy.$

(4) $z_x = \dfrac{(xy)_x}{xy} = \dfrac{1}{x}, z_y = \dfrac{(xy)_y}{xy} = \dfrac{1}{y}.\quad z_{xx} = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}, z_{xy} = 0 = z_{yx}, z_{yy} = -y^{-2} = -\dfrac{1}{y^2}.$

(5) $z_x = \dfrac{1}{2}(2x-y+2)^{-\frac{1}{2}}(2x-y+2)_x = \dfrac{1}{\sqrt{2x-y+2}}, z_y = \dfrac{1}{2}(2x-y+2)^{-\frac{1}{2}}(2x-y+2)_y = -\dfrac{1}{2\sqrt{2x-y+2}}.$

$z_{xx} = -\dfrac{1}{2}(2x-y+2)^{-\frac{3}{2}}(2x-y+2)_x = -\dfrac{1}{\sqrt{(2x-y+2)^3}}, z_{xy} = -\dfrac{1}{2}(2x-y+2)^{-\frac{3}{2}}(2x-y+2)_y$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{(2x-y+2)^3}} = z_{yx}, z_{yy} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}(2x-y+2)^{-\frac{3}{2}}(2x-y+2)_y = -\dfrac{1}{4\sqrt{(2x-y+2)^3}}.$

(6) $z_x = \dfrac{(x-y+1)_x}{x-y+1} = \dfrac{1}{x-y+1}, z_y = \dfrac{(x-y+1)_y}{x-y+1} = -\dfrac{1}{x-y+1}.$

$z_{xx} = -(x-y+1)^{-2}(x-y+1)_x = -\dfrac{1}{(x-y+1)^2}, z_{xy} = -(x-y+1)^{-2}(x-y+1)_y = \dfrac{1}{(x-y+1)^2} = z_{yx},$

$z_{yy} = (x-y+1)^{-2}(x-y+1)_y = -\dfrac{1}{(x-y+1)^2}.$

(7) $z_x = e^{x-y} + xe^{x-y}(x-y)_x = (x+1)e^{x-y}, z_y = xe^{x-y}(x-y)_y = -xe^{x-y}.$

$z_{xx} = e^{x-y} + (x+1)e^{x-y}(x-y)_x = (x+2)e^{x-y}, z_{xy} = (x+1)e^{x-y}(x-y)_y = -(x+1)e^{x-y} = z_{yx},$

$z_{yy} = -xe^{x-y}(x-y)_y = xe^{x-y}.$

70. (1) $z_x = y^3 - 4xy, z_y = 3xy^2 - 2x^2.$ $z_{xy} = 3y^2 - 4x = z_{yx}\cdots$①.

$z_{xx} = -4y.$ よって $z_{xxy} = -4.$ ①より $z_{xyx} = z_{yxx} = -4.$ よって $z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx}.$

(2) $z_x = -(2x+3y)^{-2}(2x+3y)_x = -2(2x+3y)^{-2}, z_y = -(2x+3y)^{-2}(2x+3y)_y = -3(2x+3y)^{-2}.$

$z_{xy} = 4(2x+3y)^{-3}(2x+3y)_y = \dfrac{12}{(2x+3y)^3} = z_{yx}\cdots$①.

$z_{xx} = 4(2x+3y)^{-3}(2x+3y)_x = 8(2x+3y)^{-3}.$ よって $z_{xxy} = -24(2x+3y)^{-4}(2x+3y)_y = -\dfrac{72}{(2x+3y)^4}.$

①より $z_{xyx} = z_{yxx} = -36(2x+3y)^{-4}(2x+3y)_x = -\dfrac{72}{(2x+3y)^4}.$ よって $z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx}.$

(3) $z_x = \{-\sin(2x-y)\}(2x-y)_x = -2\sin(2x-y), z_y = \{-\sin(2x-y)\}(2x-y)_y = \sin(2x-y).$

$z_{xy} = -2\{\cos(2x-y)\}(2x-y)_y = 2\cos(2x-y) = z_{yx}\cdots$①.

$z_{xx} = -2\{\cos(2x-y)\}(2x-y)_x = -4\cos(2x-y).$ よって $z_{xxy} = -4\{-\sin(2x-y)\}(2x-y)_y = -4\sin(2x-y).$

①より $z_{xyx} = z_{yxx} = 2\{-\sin(2x-y)\}(2x-y)_x = -4\sin(2x-y).$ よって $z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx}.$

(4) $z_x = e^{-xy}(-xy)_x = -ye^{-xy}, z_y = e^{-xy}(-xy)_y = -xe^{-xy}.$

$z_{xy} = -e^{-xy} - ye^{-xy}(-xy)_y = (xy-1)e^{-xy} = z_{yx}\cdots$①.

$z_{xx} = -ye^{-xy}(-xy)_x = y^2e^{-xy}.$ よって $z_{xxy} = 2ye^{-xy} + y^2e^{-xy}(-xy)_y = y(2-xy)e^{-xy}.$

①より $z_{xyx} = z_{yxx} = ye^{-xy} + (xy-1)e^{-xy}(-xy)_x = y(2-xy)e^{-xy}.$ よって $z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx}.$

71. $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}=h\dfrac{\partial z}{\partial x}+k\dfrac{\partial z}{\partial y}$. よって $\dfrac{d^2z}{dt^2}=\dfrac{d(\frac{dz}{dt})}{dt}=h\dfrac{d(\frac{\partial z}{\partial x})}{dt}+k\dfrac{d(\frac{\partial z}{\partial y})}{dt}$

$=h\left(h\dfrac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial x}+k\dfrac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial y}\right)+k\left(h\dfrac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial x}+k\dfrac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial y}\right)=h^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2hk\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+k^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. 従って

$\dfrac{d^3z}{dt^3}=\dfrac{d(\frac{d^2z}{dt^2})}{dt}=h^2\dfrac{d(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2})}{dt}+2hk\dfrac{d(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y})}{dt}+k^2\dfrac{d(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2})}{dt}$

$=h^2\left(h\dfrac{\partial(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2})}{\partial x}+k\dfrac{\partial(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2})}{\partial y}\right)+2hk\left(h\dfrac{\partial(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y})}{\partial x}+k\dfrac{\partial(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y})}{\partial y}\right)+k^2\left(h\dfrac{\partial(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2})}{\partial x}+k\dfrac{\partial(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2})}{\partial y}\right)$

$=h^3\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}+3h^2k\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}+3hk^2\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}+k^3\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}$.

72. $z=f(x,y)$ について極値をとりうる点 (a,b) は $f_x(a,b)=0, f_y(ab)=0$ をみたす, よって $f_x=0, f_y=0$ の解である.

(1) $z_x=2x+y-5=0\cdots$①$, z_y=x+2y-1=0\cdots$②. ①$\times 2-$② より $3x-9=0\Rightarrow x=3$. ①より $y=-1$.

極値をとりうる点は $(3,-1)$.

(2) $z_x=2x+2y-2=0\cdots$①$, z_y=2x+4y-2=0\cdots$②. ②$-$① より $2y=0\Rightarrow y=0$. ①より $x=1$.

極値をとりうる点は $(1,0)$.

(3) $z_x=2x+4y=0\cdots$①$, z_y=4x+3y^2+4y+1=0\cdots$②. ②$-$①$\times 2$ より

$3y^2-4y+1=(3y-1)(y-1)=0\Rightarrow y=\dfrac{1}{3},1$. ①より $x=-\dfrac{2}{3},-2$.

極値をとりうる点は $\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right),(-2,1)$.

73. 極値をとりうる点 (a,b) (つまり $f_x(a,b)=0, f_y(a,b)=0$) について $H=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-\{f_{xy}(a,b)\}^2$ とする.

(i) $H>0$ のとき $f_{xx}(a,b)>0\Rightarrow$ 極小,$f_{xx}<0\Rightarrow$ 極大. (ii) $H<0$ のとき極値をとらない.

(1) $z_x=2x-y=0\cdots$①$, z_y=-x+2y-3=0\cdots$②. ①より $y=2x$. ②より $3x-3=0\to x=1$. ①より $y=2$.

極値をとりうる点は $(1,2)$. $z_{xx}=2, z_{xy}=-1, z_{yy}=2, H=z_{xx}z_{yy}-(z_{xy})^2=3>0$. $z_{xx}=2>0$ より極小.

$(x,y)=(1,2)$ のとき $z=-3$. よって $(1,2)$ のとき極小値 -3 をとる.

(2) $z_x=3x^2-3=0\cdots$①$, z_y=-3y^2+12=0\cdots$②. ①より $x=\pm 1$. ②より $y=\pm 2$. 極値をとりうる点は

$(1,\pm 2),(-1,\pm 2)$. $z_{xx}=6x, z_{xy}=0, z_{yy}=-6y, H=z_{xx}z_{yy}-(z_{xy})^2=-36xy$.

$(1,2),(-1,-2)$ のとき $H=-72<0$, 極値をとらない. $(1,-2)$ のとき $H=72>0, z_{xx}=6>0$ より極小.

$(-1,2)$ のとき $H=72>0, z_{xx}=-6<0$ より極大. $(1,-2)$ のとき $z=-18$,$(-1,2)$ のとき $z=18$.

よって $(1,-2)$ のとき極小値 -18, $(-1,2)$ で極大値 18 をとる.

(3) $z_x=24x^2-6y=0\cdots$①$, z_y=-6x-3y^2=0\cdots$②. ①より $y=4x^2$. ②より $-6x-48x^4=0$.

$-6x(1+2x)(1-2x+4x^2)=0$. $x=0,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{4}$. グラフ上で虚数は考えないので $x=0,-\dfrac{1}{2}$.

①より $y=0,1$. 極値をとりうる点は $(0,0),\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$. $z_{xx}=48x, z_{xy}=-6, z_{yy}=-6y$,

$H=z_{xx}z_{yy}-(z_{xy})^2=-288xy-36$. $(0,0)$ のとき $H=-36<0$, 極値をとらない.

$\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$ のとき $H=108>0, z_{xx}=-24<0$ より極大. $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$ のとき $z=1$.

よって $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$ のとき極大値 1 をとる.

(4) $z_x=3x^2-6x-9=0\cdots$①$, z_y=2y-2=0\cdots$②. ①より $x=-1,3$. ②より $y=1$.

極値をとりうる点は $(-1,1),(3,1)$. $z_{xx}=6x-6, z_{xy}=0, z_{yy}=2$,

$H=z_{xx}z_{yy}-(z_{xy})^2=12x-12$. $(-1,1)$ のとき $H=-24<0$, 極値をとらない.

$(3,1)$ のとき $H=24>0, z_{xx}=12>0$ より極小. $(3,1)$ のとき $z=-28$. よって $(3,1)$ のとき極小値 -28 をとる.

74. $f(x,y)=0$ で与えられる陰関数の微分は $(y'=)\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f_x}{f_y}$

(1) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f_x}{f_y}=-\dfrac{2x-y}{-x+4y}=\dfrac{2x-y}{x-4y}$.

(2) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f_x}{f_y}=-\dfrac{3x^2-6xy}{3y^2-3x^2}=\dfrac{x^2-2xy}{x^2-y^2}$.

(3) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f_x}{f_y}=-\dfrac{1+\frac{2x}{x^2+y}}{1+\frac{1}{x^2+y}}=-\dfrac{x^2+2x+y}{x^2+y+1}$.

(4) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f_x}{f_y}=-\dfrac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}}=-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$.

(5) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f_x}{f_y}=-\dfrac{\cos x}{-\sin y}=\dfrac{\cos x}{\sin y}$.

(6) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f_x}{f_y}=-\dfrac{e^x-1}{e^y-1}$.

75. $f(x,y,z)=0$ で与えられる陰関数の偏微分は $(z_x=)\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{f_x}{f_z}, (z_y=)\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{f_y}{f_z}$

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{f_x}{f_z}=-\dfrac{2x}{-2z}=\dfrac{x}{z}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{f_y}{f_z}=-\dfrac{2y}{-2z}=\dfrac{y}{z}$.

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{f_x}{f_z}=-\dfrac{yz}{2z+xy}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{f_y}{f_z}=-\dfrac{xz}{2z+xy}$.

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{f_x}{f_z}=-\dfrac{\cos x}{\cos z}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{f_y}{f_z}=-\dfrac{\cos y}{\cos z}$.

(4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{f_x}{f_z}=-\dfrac{\frac{(x^2)'}{x^2}}{\frac{(z^2)'}{z^2}}=-\dfrac{z}{x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{f_y}{f_z}=-\dfrac{\frac{(y^2)'}{y^2}}{\frac{(z^2)'}{z^2}}=-\dfrac{z}{y}$.

(5) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{f_x}{f_z}=-\dfrac{e^{x+y}(x+y)_x+e^{z+x}(z+x)_x}{e^{y+z}(y+z)_z+e^{z+x}(z+x)_z}=-\dfrac{e^{x+y}+e^{z+x}}{e^{y+z}+e^{z+x}}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{f_y}{f_z}=-\dfrac{e^{x+y}(x+y)_y+e^{y+z}(y+z)_y}{e^{y+z}(y+z)_z+e^{z+x}(z+x)_z}=-\dfrac{e^{x+y}+e^{y+z}}{e^{y+z}+e^{z+x}}$.

(6) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{f_x}{f_z}=-\dfrac{\{-\sin(xyz)\}(xyz)_x}{\{-\sin(xyz)\}(xyz)_z}=-\dfrac{z}{x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{f_y}{f_z}=-\dfrac{\{-\sin(xyz)\}(xyz)_y}{\{-\sin(xyz)\}(xyz)_z}=-\dfrac{z}{y}$.

76. 曲面 $f(x,y,z)=0$ 上の点 (a,b,c) における接平面の方程式は $f_x(a,b,c)(x-a)+f_y(a,b,c)(y-b)+f_z(a,b,c)(z-c)=0$.

(1) $f_x=y+z, f_y=x+z, f_z=y+x$. $(1,0,1)$ のとき $f_x=1, f_y=2, f_z=1$. よって

求める接平面の方程式は $(x-1)+2(y-0)+(z-1)=0$, すなわち $x+2y+z=2$.

(2) $f_x=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, f_y=\dfrac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}, f_z=\dfrac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{z}}$. $(1,1,4)$ のとき $f_x=\dfrac{1}{2}, f_y=\dfrac{1}{2}, f_z=\dfrac{1}{4}$.

よって, 求める接平面の方程式は $\dfrac{1}{2}(x-1)+\dfrac{1}{2}(y-1)+\dfrac{1}{4}(z-4)=0$, すなわち $2x+2y+z=8$.

(3) $f_x=2x, f_y=-6y, f_z=1$. $(x,y)=(2,1)$ のとき $f_x=4, f_y=-6$, 与式より $2^2-3\cdot 1^2+z=0$ だから $z=-1(=c)$.

よって, 求める接平面の方程式は $4(x-2)-6(y-1)+(z+1)=0$, すなわち $4x-6y+z=1$.

(4) $f_x=\log y, f_y=\dfrac{x}{y}, f_z=-\dfrac{1}{z}$. $(x,y)=(1,e)$ のとき $f_x=1, f_y=\dfrac{1}{e}$, 与式より $\log e-\log z=0$ だから

$z=e(=c)$, また $f_z=-\dfrac{1}{e}$.

よって, 求める接平面の方程式は $(x-1)+\dfrac{1}{e}(y-e)-\dfrac{1}{e}(z-e)=0$, すなわち $ex+y-z=e$.

77. 条件 $\varphi(x,y)=0$ のもとで, $z=f(x,y)$ が極値をとる点において $\dfrac{f_x}{\varphi_x}=\dfrac{f_y}{\varphi_y}\Leftrightarrow f_x=\lambda\varphi_x, f_y=\lambda\varphi_y$ (λ は定数)

(1) $\varphi=x^2+y^2-3, f=x-y$. $\dfrac{f_x}{\varphi_x}=\dfrac{f_y}{\varphi_y}$ より $\dfrac{1}{2x}=\dfrac{-1}{2y}$. よって $y=-x$. これを $\varphi=0$ に代入して

$2x^2=3, x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}, y=\mp\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. よって極値 (最大値, 最小値) をとる点は $\left(\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2},\mp\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

$\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$ のとき $z=x-y=\sqrt{6}$, $\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$ のとき $z=x-y=-\sqrt{6}$. よって

最大値 $\sqrt{6}$ $\left((x,y)=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)\right)$, 最小値 $-\sqrt{6}$ $\left((x,y)=\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)\right)$.

(2) $f=x^2y$. $\dfrac{f_x}{\varphi_x}=\dfrac{f_y}{\varphi_y}$ より $\dfrac{2xy}{2x}=\dfrac{x^2}{2y}$. よって $x^2=2y^2$. これを $\varphi=0$ に代入して

$3y^2=3, y=\pm 1, x=\pm\sqrt{2}$. よって極値 (最大値, 最小値) をとる点は $(\pm\sqrt{2},1), (\pm\sqrt{2},-1)$.

$(\pm\sqrt{2},1)$ のとき $z=x^2y=2$, $(\pm\sqrt{2},-1)$ のとき $z=x^2y=-2$. よって

最大値 2 $((x,y)=(\pm\sqrt{2},1))$, 最小値 -2 $((x,y)=(\pm\sqrt{2},-1))$.

78. 底面の 1 辺の長さを $x$cm, 高さを $y$cm とすると．容積 4cm^3 より $x^2y=4$. よって条件は $\varphi(x,y)=x^2y-4=0$.

表面積は $f(x,y)=x^2+4xy$. $\dfrac{f_x}{\varphi_x}=\dfrac{f_y}{\varphi_y}$ より $\dfrac{2x+4y}{2xy}=\dfrac{4x}{x^2}$. よって $2x^2+4xy=8xy$ より $x=2y$.

これを $\varphi=0$ に代入して $4y^3-4=4(y-1)(y^2+y+1)=0, y=1, \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$.

虚数はありえないので $y=1, x=2$. よって 1 辺の長さ 2cm, 高さ 1cm.

79. α をパラメータとする曲線群 $f(x,y,\alpha)=0$ の包絡線上の点は $f(x,y,\alpha)=0, f_\alpha(x,y,\alpha)=0$ をみたす.

(1) $f=x-(y-\alpha)^2-3, f_\alpha=2(y-\alpha)(y-\alpha)_\alpha=-2(y-\alpha)$. $f_\alpha=0$ より $\alpha=y$. これを $f=0$ に代入して $x-3=0$.

よって求める包絡線の方程式は $x=3$.

(2) $f=\dfrac{x}{\alpha}+\alpha y-1, f_\alpha=-x\alpha^{-2}+y=-\dfrac{x}{\alpha^2}+y$. $f_\alpha=0$ より $\alpha^2=\dfrac{x}{y}\cdots$①. $f=0$ より $\dfrac{x}{\alpha}+\alpha y=1$.

両辺を 2 乗して $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+2xy+\alpha^2y^2=1$. これに①を代入して $\dfrac{x^2}{\frac{x}{y}}+2xy+\dfrac{x}{y}\cdot y^2=1$.

よって求める包絡線の方程式は $4xy=1$.

p.20　CHECK

80. (1) $z_x=3x^2+6xy^2, z_y=6x^2y+6y^2, z_{xx}=6x+6y^2, z_{xy}=12xy=z_{yx}, z_{yy}=6x^2+12y$.

(2) $z_x=2e^{2x}\sin 2y, z_y=2e^{2x}\cos 2y, z_{xx}=4e^{2x}\sin 2y, z_{xy}=4e^{2x}\cos 2y=z_{yx}, z_{yy}=-4e^{2x}\sin 2y$.

(3) $z_x=\dfrac{0-y(x+y)_x}{(x+y)^2}=-\dfrac{y}{(x+y)^2}, z_y=\dfrac{(x+y)-y(x+y)_y}{(x+y)^2}=\dfrac{x}{(x+y)^2}$,

$z_{xx}=-\dfrac{0-y\{(x+y)^2\}_x}{(x+y)^4}=\dfrac{y\cdot 2(x+y)(x+y)_x}{(x+y)^4}=\dfrac{2y}{(x+y)^3}$,

$z_{xy}=-\dfrac{(x+y)^2-y\{(x+y)^2\}_y}{(x+y)^4}=-\dfrac{(x+y)^2-y\cdot 2(x+y)(x+y)_y}{(x+y)^4}=-\dfrac{(x+y)-2y}{(x+y)^3}=-\dfrac{x-y}{(x+y)^3}=z_{yx}$,

$z_{yy}=\dfrac{0-x\{(x+y)^2\}_y}{(x+y)^4}=-\dfrac{x\cdot 2(x+y)(x+y)_y}{(x+y)^4}=-\dfrac{2x}{(x+y)^3}$.

(4) $z_x=\dfrac{1}{2}(2x+6y)^{-\frac{1}{2}}(2x+6y)_x=\dfrac{1}{\sqrt{2x+6y}}, z_y=\dfrac{1}{2}(2x+6y)^{-\frac{1}{2}}(2x+6y)_y=\dfrac{3}{\sqrt{2x+6y}}$,

$z_{xx}=-\dfrac{1}{2}(2x+6y)^{-\frac{3}{2}}(2x+6y)_x=-\dfrac{1}{\sqrt{(2x+6y)^3}}, z_{xy}=-\dfrac{1}{2}(2x+6y)^{-\frac{3}{2}}(2x+6y)_y=-\dfrac{3}{\sqrt{(2x+6y)^3}}=z_{yx}$,

$z_{yy}=-3\cdot\dfrac{1}{2}(2x+6y)^{-\frac{3}{2}}(2x+6y)_y=-\dfrac{9}{\sqrt{(2x+6y)^3}}$.

81. (1) $z_x=3x^2\log y, z_y=\dfrac{x^3}{y}, z_{xx}=6x\log y, z_{xy}=\dfrac{3x^2}{y}=z_{yx}, z_{yy}=-x^3y^{-2}=-\dfrac{x^3}{y^2}$,

$z_{xxx}=6\log y, z_{xxy}=\dfrac{6x}{y}=z_{xyx}=z_{yxx}, z_{xyy}=-3x^2y^{-2}=-\dfrac{3x^2}{y^2}=z_{yxy}=z_{yyx}, z_{yyy}=2x^3y^{-3}=\dfrac{2x^3}{y^3}$.

(2) $z_x=4(3x+2y-1)^3(3x+2y-1)_x=12(3x+2y-1)^3, z_y=4(3x+2y-1)^3(3x+2y-1)_y=8(3x+2y-1)^3$,

$z_{xx}=36(3x+2y-1)^2(3x+2y-1)_x=108(3x+2y-1)^2, z_{xy}=36(3x+2y-1)^2(3x+2y-1)_y=72(3x+2y-1)^2$

$=z_{yx}, z_{yy}=24(3x+2y-1)^2(3x+2y-1)_y=48(3x+2y-1)^2$,

$z_{xxx}=216(3x+2y-1)(3x+2y-1)_x=648(3x+2y-1), z_{xxy}=216(3x+2y-1)(3x+2y-1)_y=432(3x+2y-1)$

$=z_{xyx}=z_{yxx}, z_{xyy}=144(3x+2y-1)(3x+2y-1)_y=288(3x+2y-1)=z_{yxy}=z_{yyx}$,

$z_{yyy}=96(3x+2y-1)(3x+2y-1)_y=192(3x+2y-1)$.

82. (1) $z_x=-2x-2y=0\cdots$①$, z_y=-2x+3y^2-2y-12=0\cdots$②. ①より $x=-y$. ②に代入して $3y^2-12=0$.

よって $y=\pm 2, x=\mp 2$. 極値をとりうる点は $(2,-2),(-2,2)$. $z_{xx}=-2, z_{xy}=-2, z_{yy}=6y-2$.

$(2,-2)$ のとき $z_xx=-2, z_{xy}=-2, z_{yy}=-14, H=-2\cdot(-14)-(-2)^2=24>0, z_{xx}=-2<0$. よって極大.

$(-2,2)$ のとき $z_xx=-2, z_{xy}=-2, z_{yy}=10, H=-2\cdot 10-(-2)^2=-24<0$. よって極値をとらない.

$(2,-2)$ のとき $z=16$ だから z は点 $(2,-2)$ で極大値 16 をとる.

(2) $z_x=3x^2-12x+9=0\cdots$①$, z_y=2y-4=0\cdots$②. ①より $3(x-1)(x-3)=0$. よって $x=1,3$. ②より $y=2$.

極値をとりうる点は $(1,2),(3,2)$. $z_{xx}=6x-12, z_{xy}=0, z_{yy}=2$.

$(1,2)$ のとき $z_xx=-6, z_{xy}=0, z_{yy}=2, H=-12<0$. よって極値をとらない.

$(3,2)$ のとき $z_xx=6, z_{xy}=0, z_{yy}=2, H=12>0, z_{xx}=6>0$. よって極小.

$(3,2)$ のとき $z=-4$ だから z は点 $(3,2)$ で極小値 -4 をとる.

83. (1) $f=x^3y^3+y-x, \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f_x}{f_y}=-\dfrac{3x^2y^3-1}{3x^3y^2+1}$.

(2) $f=\log(x^2+y^2)-y-1, \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f_x}{f_y}=-\dfrac{\frac{(x^2+y^2)_x}{x^2+y^2}}{\frac{(x^2+y^2)_y}{x^2+y^2}-1}=-\dfrac{2x}{2y-(x^2+y^2)}=\dfrac{2x}{x^2+y^2-2y}$.

84. (1) $f=x^2+y^2+z^2-2x-4y-4, \dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{f_x}{f_z}=-\dfrac{2x-2}{2z}=-\dfrac{x-1}{z}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{f_y}{f_z}=-\dfrac{2y-4}{2z}=-\dfrac{y-2}{z}$.

(2) $f=e^x+e^{2y}+e^{3z}-6, \dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{f_x}{f_z}=-\dfrac{e^x}{3e^{3z}}=-\dfrac{1}{3}e^{x-3z}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{f_y}{f_z}=-\dfrac{2e^{2y}}{3e^{3z}}=-\dfrac{2}{3}e^{2y-3z}$.

85. (1) $f=2x^2+3y^2-z^2+xy-x+3z-5, f_x=4x+y-1, f_y=6y+x, f_z=-2z+3$.

$(1,-1,1)$ のとき $f_x=2, f_y=-5, f_z=1$. よって $2(x-1)-5(y+1)+(z-1)=0$, すなわち $2x-5y+z=8$.

(2) $f=x\sin y-y\cos z+z\tan x-\dfrac{\pi}{4}, f_x=\sin y+\dfrac{z}{\cos^2 x}, f_y=x\cos y-\cos z, f_z=y\sin z+\tan x$.

$\left(\dfrac{\pi}{4},-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ のとき $f_x=-1, f_y=-1, f_z=1$. よって $-\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\left(y+\dfrac{\pi}{2}\right)+(z-0)=0$, すなわち

$x+y-z=-\dfrac{\pi}{4}$.

86. (1) $\varphi=x^2+y^2-4, f=x+4y+1$. $\varphi_x=2x, \varphi_y=2y, f_x=1, f_y=4$. よって $\dfrac{1}{2x}=\dfrac{4}{2y}$ より $y=4x$.

$\varphi=0$ に代入して $x^2+16x^2=4$. よって $x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{17}}, y=\pm\dfrac{8}{\sqrt{17}}$. 極値をとりうる点は

$\left(\dfrac{2}{\sqrt{17}},\dfrac{8}{\sqrt{17}}\right),\left(-\dfrac{2}{\sqrt{17}},-\dfrac{8}{\sqrt{17}}\right)$. $\left(\dfrac{2}{\sqrt{17}},\dfrac{8}{\sqrt{17}}\right)$ のとき $f=\dfrac{34}{\sqrt{17}}=2\sqrt{17}$.

$\left(-\dfrac{2}{\sqrt{17}},-\dfrac{8}{\sqrt{17}}\right)$ のとき $f=-\dfrac{34}{\sqrt{17}}=-2\sqrt{17}$.

よって $\left(\dfrac{2}{\sqrt{17}},\dfrac{8}{\sqrt{17}}\right)$ のとき最大値 $2\sqrt{17}$, $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{17}},-\dfrac{8}{\sqrt{17}}\right)$ のとき最小値 $-2\sqrt{17}$.

(2) $\varphi=x^2+y^2-4, f=xy^3$. $\varphi_x=2x, \varphi_y=2y, f_x=y^3, f_y=3xy^2$. よって $\dfrac{y^3}{2x}=\dfrac{3xy^2}{2y}$ より $2y^4=6x^2y^2$.

$2y^4-6x^2y^2=2y^2(y^2-3x^2)=0$. よって $y=0,\pm\sqrt{3}x$. $\varphi=0$ に代入して

$y=0$ のとき $x^2=4$. よって $x=\pm2$. $y=\pm\sqrt{3}x$ のとき $x^2+3x^2=4$. よって $x=\pm1, y=\pm\sqrt{3}$.

極値をとりうる点は $(\pm1,0),(1,\pm\sqrt{3}),(-1,\pm\sqrt{3})$.

$(\pm1,0)$ のとき $f=0$, $(\pm1,\pm\sqrt{3})$ のとき $f=3\sqrt{3}$, $(\pm1,\mp\sqrt{3})$ のとき $f=-\sqrt{3}$(復号同順).

よって $(\pm1,\pm\sqrt{3})$ のとき最大値 $3\sqrt{3}$, $(\pm1,\mp\sqrt{3})$ のとき最小値 $-3\sqrt{3}$(復号同順).

87. (1) $f=\alpha^2x+2\alpha-y, f_\alpha=2\alpha x+2$. $f_\alpha=0$ より $\alpha=-\dfrac{1}{x}$. $f=0$ に代入して $\left(-\dfrac{1}{x}\right)^2x+2\left(-\dfrac{1}{x}\right)-y=0$.

よって $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x}=y$. $xy=-1$.

(2) $f=(x-\alpha)^2+\alpha^2-y, f_\alpha=2(x-\alpha)(x-\alpha)_\alpha+2\alpha=-2(x-\alpha)+2\alpha=-2x+4\alpha$. $f_\alpha=0$ より $\alpha=\dfrac{x}{2}$.

$f=0$ に代入して $\left(x-\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2-y=0$. $y=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=\dfrac{x^2+x^2}{4}=\dfrac{x^2}{2}$. $y=\dfrac{x^2}{2}$.