大日本図書　新微分積分 II 問題集　4 章§ 1 BASIC 詳しい解答

p.44. 4 章§ 1. 1 階微分方程式　BASIC

170. 変化率は $\dfrac{dx}{dt}$. また「減少する割合が k」⇔「変化する割合が $-k$」だから $\dfrac{dx}{dt}=-kx(t)$.

171. (1) $\dfrac{dx}{dt}=(c(t-1)^{-1}\}'=-c(t-1)^{-2}(t-1)'=-\dfrac{c}{(t-1)^2}$. $x=\dfrac{c}{t-1}$ より $c=x(t-1)$. よって

$\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{x(t-1)}{(t-1)^2}=-\dfrac{x}{t-1}$.

(2) $\dfrac{dx}{dt}=(ct^3)'=3ct^2$. $x=ct^3$ より $c=\dfrac{x}{t^3}$ だから $\dfrac{dx}{dt}=3t^2\cdot\dfrac{x}{t^3}=\dfrac{3x}{t}$.

172. 初期条件より $1=\dfrac{C}{-1}$. よって $C=-1$. 求める特殊解は $x=-\dfrac{1}{t-1}$.

173. (1) $x=\cos t$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=-\sin t$. $-2x\tan t+\sin t=-2\cos t\tan t+\sin t=-2\cos t\cdot\dfrac{\sin t}{\cos t}+\sin t=-\sin t$.

よって微分方程式を満たすから $x=\cos t$ はこの微分方程式の解である.

(2) $x=\cos t+C\cos^2 t$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=-\sin t+C\cdot 2\cos t(\cos t)'=-\sin t+C\cdot 2\cos t(-\sin t)=-\sin t-2C\cos t\sin t$.

$-2x\tan t+\sin t=-2(\cos t+C\cos^2 t)\cdot\dfrac{\sin t}{\cos t}+\sin t=-2(\sin t+C\cos t\sin t)+\sin t=-\sin t-2C\cos t\sin t$.

よって微分方程式を満たし, 任意定数を含むから $x=\cos t$ はこの微分方程式の一般解である.

(3) (2) の一般解に初期条件を代入して $2=\cos 0+C\cos^2 0=1+C$. よって $C=1$. 求める特殊解は $x=\cos t+\cos^2 t$.

174. 変数分離形

(1) $\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt}=3t^2$. $\displaystyle\int\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}dt=\int 3t^2dt$ より $\displaystyle\int\frac{1}{x}dx=\int 3t^2dt$. $\log|x|=t^3+c$. $x=\pm e^{t^3+c}=\pm e^ce^{t^3}$.

$\pm e^c=C$ とおいて $x=Ce^{t^3}$ (C は任意定数).

(2) $\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{2}{t}$. $\displaystyle\int\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}dt=-\int\frac{2}{t}dt$ より $\displaystyle\int\frac{1}{x}dx=-\int\frac{2}{t}dt$. $\log|x|=-2\log|t|+c$. $\log|x|+2\log|t|=c$.

$\log|xt^2|=c$. $xt^2=\pm e^c$. $\pm e^c=C$ とおいて $xt^2=C$ より $x=\dfrac{C}{t^2}$ (C は任意定数).

(3) $\cos x\dfrac{dx}{dt}=\sin t$. $\displaystyle\int\cos x\frac{dx}{dt}dt=\int\sin t\ dt$ より $\displaystyle\int\cos x\ dx=\int\sin t\ dt$. $\sin x=-\cos t+C$.

$\sin x+\cos t=C$ (C は任意定数).

(4) $\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t}{1-t^2}$. $\displaystyle\int\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}dt=\int\frac{2t}{1-t^2}dt$ より $\displaystyle\int\frac{1}{x}\ dx=\int\frac{-(1-t^2)'}{1-t^2}dt$. $\log|x|=-\log|1-t^2|+c$.

$\log|x|+\log|1-t^2|=c$. $\log|x(1-t^2)|=c$. $x(1-t^2)=\pm e^c$. $\pm e^c=C$ とおいて $x(1-t^2)=C$.

$x=\dfrac{C}{1-t^2}$ (C は任意定数).

175. 変数分離形

(1) $\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{1}{t^2}$. $\displaystyle\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{dt}{t^2}$. $\log|x|=-\dfrac{t^{-1}}{-1}+c=\dfrac{1}{t}+c$. $x=\pm e^{\frac{1}{t}+c}=\pm e^ce^{\frac{1}{t}}$. $\pm e^c=C$ とおいて

$x=Ce^{\frac{1}{t}}$. $t=1$ のとき $x=1$ より $1=Ce$. $C=\dfrac{1}{e}=e^{-1}$. よって $x=e^{\frac{1}{t}-1}$.

(2) $\dfrac{x^2}{x^3+1}\dfrac{dx}{dt}=1$. $\displaystyle\int\frac{x^2}{x^3+1}dx=\int dt$. $\displaystyle\frac{1}{3}\int\frac{(x^3+1)'}{x^3+1}dx=\int dt$. $\dfrac{1}{3}\log|x^3+1|=t+c$. $x^3+1=\pm e^{3t+3c}$.

$x^3=\pm e^{3c}e^{3t}-1$. $\pm e^{3c}=C$ とおくと $x^3=Ce^{3t}-1$. $t=0$ のとき $x=1$ より $1=C-1$. $C=2$.

よって $x^3=2e^{3t}-1$.

176. 同次形 $u=\dfrac{x}{t}$ とおくと $x=tu$, $\dfrac{dx}{dt}=u+t\dfrac{du}{dt}$

(1) $u+t\dfrac{du}{dt}=\dfrac{tu}{t}-\dfrac{2t}{tu}=u-\dfrac{2}{u}$. よって $t\dfrac{du}{dt}=-\dfrac{2}{u}$. $\displaystyle\int udu=-\int\frac{2}{t}dt$. $\dfrac{u^2}{2}=-2\log|t|+c$. $u^2=-4\log|t|+2c$.

$u=\dfrac{x}{t}$ より $\dfrac{x^2}{t^2}=-4\log|t|+2c$. $2c=C$ とおくと $x^2=t^2(-4\log|t|+C)$ (C は任意定数).

(2) $u+t\dfrac{du}{dt}=\dfrac{tu}{t}+\cos^2\dfrac{tu}{t}=u+\cos^2 u$. よって $t\dfrac{du}{dt}=\cos^2 u$. $\displaystyle\int\frac{du}{\cos^2 u}=\int\frac{dt}{t}$.

$\tan u=\log|t|+C$. $u=\dfrac{x}{t}$ より $\tan\dfrac{x}{t}=\log|t|+C$ (C は任意定数).

177. 同次形 $u+t\dfrac{du}{dt}=\dfrac{3tu}{t}-1=3u-1$. よって $t\dfrac{du}{dt}=2u-1$. $\displaystyle\int\frac{1}{2u-1}du=\int\frac{dt}{t}$. $\displaystyle\frac{1}{2}\int\frac{(2u-1)'}{2u-1}du=\int\frac{dt}{t}$.
$\dfrac{1}{2}\log|2u-1|=\log|t|+c$. $\log|2u-1|-2\log|t|=\log\left|\dfrac{2u-1}{t^2}\right|=2c$. $\dfrac{2u-1}{t^2}=\pm e^{2c}$. $\pm e^{2c}=C$ とおくと
$2u-1=Ct^2$. $u=\dfrac{x}{t}$ より $\dfrac{2x}{t}-1=Ct^2$. $x=\dfrac{Ct^3+t}{2}$.
$t=1$ のとき $x=2$ より $2=\dfrac{C+1}{2}$. $C=3$. よって $x=\dfrac{3t^3}{2}+\dfrac{t}{2}$.

178. 1 階線形

(1) $\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{3x}{t}=0\cdots$① について $\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{3}{t}$. $\displaystyle\int\frac{dx}{x}=\int\frac{3}{t}dt$. $\log|x|=3\log|t|+c$. $\log|x|-3\log|t|=\log\left|\dfrac{x}{t^3}\right|=c$.
$\dfrac{x}{t^3}=\pm e^c$. $\pm e^c=C$ とおくと①の一般解は $x=Ct^3$.
$C=u$ (u は t の関数) とおくと $x=ut^3\cdots$②. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{du}{dt}t^3+u\cdot 3t^2$. これと②を元の微分方程式に代入して
$\dfrac{du}{dt}t^3+3ut^2-\dfrac{3ut^3}{t}=2t^2-t$ より $\dfrac{du}{dt}=\dfrac{2}{t}-\dfrac{1}{t^2}$. よって $u=2\log|t|-\dfrac{t^{-1}}{-1}+C=2\log|t|+\dfrac{1}{t}+C$.
②より $x=\left(2\log|t|+\dfrac{1}{t}+C\right)t^3$. よって求める一般解は $x=t^2(2t\log|t|+1+Ct)$ (C は任意定数).

(2) $\dfrac{dx}{dt}+x\tan t=0\cdots$① について $\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt}=-\tan t=\dfrac{-\sin t}{\cos t}$. $\displaystyle\int\frac{dx}{x}=\int\frac{(\cos t)'}{\cos t}dt$. $\log|x|=\log|\cos t|+c$.
$\log|x|-\log|\cos t|=\log\left|\dfrac{x}{\cos t}\right|=c$. $\dfrac{x}{\cos t}=\pm e^c$. $\pm e^c=C$ とおくと①の一般解は $x=C\cos t$.
$C=u$ (u は t の関数) とおくと $x=u\cos t\cdots$②. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{du}{dt}\cos t+u(-\sin t)$. これと②を元の微分方程式に代入して $\dfrac{du}{dt}\cos t-u\sin t+u\cos t\tan t=\dfrac{1}{\cos t}$. $\cos t\tan t=\cos t\cdot\dfrac{\sin t}{\cos t}=\sin t$ より $\dfrac{du}{dt}\cos t=\dfrac{1}{\cos t}$.
$\dfrac{du}{dt}=\dfrac{1}{\cos^2 t}$. よって $u=\tan t+C$. ②より $x=(\tan t+C)\cos t$. よって求める一般解は
$x=\sin t+C\cos t$ (C は任意定数).

179. 1 階線形

(1) $\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{2t}{t^2+1}x=0\cdots$① について $\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{2t}{t^2+1}$. $\displaystyle\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{2t}{t^2+1}dt$. $\log|x|=-\log|t^2+1|+c$.
$\log|x|+\log|t^2+1|=\log|x(t^2+1)|=c$. $x(t^2+1)=\pm e^c$. $\pm e^c=C$ とおくと①の一般解は $x=\dfrac{C}{t^2+1}$.
$C=u$ (u は t の関数) とおくと $x=\dfrac{u}{t^2+1}\cdots$②. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\frac{du}{dt}(t^2+1)-2ut}{(t^2+1)^2}$. これと②を元の微分方程式に代入して $\dfrac{\frac{du}{dt}(t^2+1)-2ut}{(t^2+1)^2}+\dfrac{2t}{t^2+1}\cdot\dfrac{u}{t^2+1}=4t$ より $\dfrac{du}{dt}=4t(t^2+1)=4t^3+4t$. よって $u=t^4+2t^2+C$.
②より $x=\dfrac{t^4+2t^2+C}{t^2+1}$.
$t=0$ のとき $x=1$. よって $1=C$. $x=\dfrac{t^4+2t^2+1}{t^2+1}=\dfrac{(t^2+1)^2}{t^2+1}=t^2+1$. 求める特殊解は $x=t^2+1$.

(2) $\dfrac{dx}{dt}-2x=0\cdots$① について $\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt}=2$. $\displaystyle\int\frac{dx}{x}=\int 2dt$. $\log|x|=2t+c$. $x=\pm e^{2t+c}=\pm e^ce^{2t}$.
$\pm e^c=C$ とおくと①の一般解は $x=Ce^{2t}$.
$C=u$ (u は t の関数) とおくと $x=ue^{2t}\cdots$②. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{du}{dt}e^{2t}+u\cdot 2e^{2t}$. これと②を元の微分方程式に代入して
$\dfrac{du}{dt}e^{2t}+2ue^{2t}-2ue^{2t}=e^t$. $\dfrac{du}{dt}e^{2t}=e^t$ より $\dfrac{du}{dt}=e^{-t}$. $u=-e^{-t}+C$②より $x=(-e^{-t}+C)e^{2t}=-e^t+Ce^{2t}$.
$t=0$ のとき $x=1$ より $1=-1+C$. よって $C=2$. よって求める特殊解は $x=-e^t+2e^{2t}$.

p.45 CHECK

180. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t+c}$. $x=\log(t+c)$ より $t+c=e^x$. よって $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{e^x}=e^{-x}$.

181. (1) $x=te^{-t}$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=e^{-t}+t(-e^{-t})=e^{-t}-te^{-t}$. $-x+e^{-t}=-te^{-t}+e^{-t}$. よって微分方程式を満たすから
$x=te^{-t}$ はこの微分方程式の解である.

(2) $x=(t+C)e^{-t}$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=e^{-t}+(t+C)(-e^{-t})=e^{-t}-(t+C)e^{-t}$. $-x+e^{-t}=-(t+C)e^{-t}+e^{-t}$.

よって微分方程式を満たし, 任意定数を含むから $x=(t+C)e^{-t}$ はこの微分方程式の一般解である.

(3) (2) の一般解に初期条件を代入して $3=C$. よって求める特殊解は $x=(t+3)e^{-t}$.

182. 変数分離形

(1) $\dfrac{1}{x+1}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t+2}$. $\displaystyle\int\frac{dx}{x+1}=\int\frac{dt}{t+2}$. $\log|x+1|=\log|t+2|+c$. $\log|x+1|-\log|t+2|=\log\left|\dfrac{x+1}{t+2}\right|=c$.
$\dfrac{x+1}{t+2}=\pm e^c$. $\pm e^c=C$ とおいて $\dfrac{x+1}{t+2}=C$. $x=C(t+2)-1$ (C は任意定数).

(2) $\dfrac{2x}{1-x^2}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t}$. $\displaystyle\int\frac{-(1-x^2)'}{1-x^2}dx=\int\frac{dt}{t}$. $-\log|1-x^2|=\log|t|+c$. $\log|1-x^2|+\log|t|=\log|t(1-x^2)|=-c$.
$t(1-x^2)=\pm e^{-c}$. $\pm e^{-c}=-C$ とおいて $t(1-x^2)=-C$. $x^2=1+\dfrac{C}{t}$ (C は任意定数).

(3) $\dfrac{1}{x^2}\dfrac{dx}{dt}=1$. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2}=\int dt$. $\dfrac{x^{-1}}{-1}=t+C$. $-\dfrac{1}{x}=t+C$. $x=-\dfrac{1}{t+C}$ (C は任意定数).

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\dfrac{dx}{dt}=1$. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int dt$. $\sin^{-1}x=t+C$. $x=\sin(t+C)$ (C は任意定数).

183. 変数分離形

(1) $\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt}=\cos t$. $\displaystyle\int\frac{dx}{x}=\int\cos t\,dt$. $\log|x|=\sin t+c$. $x=\pm e^{\sin t+c}=\pm e^c e^{\sin t}$. $\pm e^c=C$ とおいて
$x=Ce^{\sin t}$. $t=0$ のとき $x=1$ より $1=C$. よって $x=e^{\sin t}$.

(2) $e^x\dfrac{dx}{dt}=2t$. $\displaystyle\int e^x dx=\int 2t\,dt$. $e^x=t^2+C$. $x=\log(t^2+C)$.
$t=0$ のとき $x=0$ より $0=\log C$. $C=1$ よって $x=\log(t^2+1)$.

184. 同次形 $u=\dfrac{x}{t}$ とおくと $x=tu$, $\dfrac{dx}{dt}=u+t\dfrac{du}{dt}$

(1) $u+t\dfrac{du}{dt}=\dfrac{2tu-3t}{t}=2u-3$. よって $t\dfrac{du}{dt}=u-3$. $\displaystyle\int\frac{du}{u-3}=\int\frac{dt}{t}$. $\log|u-3|=\log|t|+c$.
$\log|u-3|-\log|t|=\log\left|\dfrac{u-3}{t}\right|=c$. $\dfrac{u-3}{t}=\pm e^c$. $\pm e^c=C$ とおくと $\dfrac{u-3}{t}=C$.
$u=\dfrac{x}{t}$ より $\dfrac{\frac{x}{t}-3}{t}=C$. $x=Ct^2+3t$ (C は任意定数).

(2) $u+t\dfrac{du}{dt}=\dfrac{tu}{t}+\tan\dfrac{tu}{t}=u+\tan u$. よって $t\dfrac{du}{dt}=\tan u$. $\displaystyle\int\frac{1}{\tan u}du=\int\frac{dt}{t}$. $\displaystyle\int\frac{\cos u}{\sin u}du=\int\frac{dt}{t}$.
$\log|\sin u|=\log|t|+c$. $\log|\sin u|-\log|t|=\log\left|\dfrac{\sin u}{t}\right|=c$. $\dfrac{\sin u}{t}=\pm e^c$. $\pm e^c=C$ とおくと $\sin u=Ct$.
$u=\dfrac{x}{t}$ より $\sin\dfrac{x}{t}=Ct$ (C は任意定数).

185. 同次形 $u+t\dfrac{du}{dt}=\dfrac{t^2u-2t^2u^2}{t^2}=u-2u^2$. よって $t\dfrac{du}{dt}=-2u^2$. $\displaystyle-\int\frac{1}{u^2}du=\int\frac{2}{t}dt$. $-\dfrac{u^{-1}}{-1}=2\log|t|+C$.
$\dfrac{1}{u}=2\log|t|+C$. $u=\dfrac{x}{t}$ より $\dfrac{1}{\frac{x}{t}}=\dfrac{t}{x}=2\log|t|+C$. $x=\dfrac{t}{2\log|t|+C}$.
$t=1$ のとき $x=1$ より $1=\dfrac{1}{C}$. $C=1$. よって $x=\dfrac{t}{2\log|t|+1}$.

186. 1 階線形

(1) $\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{3x}{t}=0\cdots$① について $\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{3}{t}$. $\displaystyle\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{3}{t}dt$. $\log|x|=-3\log|t|+c$.
$\log|x|+3\log|t|=\log|t^3x|=c$. $t^3x=\pm e^c$. $\pm e^c=C$ とおくと①の一般解は $x=\dfrac{C}{t^3}$.
$C=u$ (u は t の関数) とおくと $x=\dfrac{u}{t^3}\cdots$②. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\frac{du}{dt}t^3-u\cdot 3t^2}{t^6}=\dfrac{\frac{du}{dt}t-3u}{t^4}=$. これと②を元の微分方程式に代入して $\dfrac{\frac{du}{dt}t-3u}{t^4}+\dfrac{3u}{t^4}=\dfrac{1}{t}+1$ より $\dfrac{du}{dt}=t^2+t^3$. よって $u=\dfrac{t^4}{4}+\dfrac{t^3}{3}+C$.
②より求める一般解は $x=\dfrac{1}{4}t+\dfrac{1}{3}+\dfrac{C}{t^3}$ (C は任意定数).

(2) $\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{x}{t}=0\cdots$① について $\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{1}{t}$. $\displaystyle\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{dt}{t}$. $\log|x|=-\log|t|+c$.
$\log|x|+\log|t|=\log|tx|=c$. $tx=\pm e^c$. $\pm e^c=C$ とおくと①の一般解は $x=\dfrac{C}{t}$.

$C=u$ (u は t の関数) とおくと $x=\dfrac{u}{t}\cdots$②. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\frac{du}{dt}t-u}{t^2}$. これと②を元の微分方程式に代入

して $\dfrac{\frac{du}{dt}t-u}{t^2}+\dfrac{u}{t^2}=\sin t$. $\dfrac{du}{dt}=t\sin t$. $u=\displaystyle\int t\sin t\;dt=-t\cos t+\int\cos t\;dt=-t\cos t+\sin t+C$.

②より求める一般解は $x=-\cos t+\dfrac{\sin t}{t}+\dfrac{C}{t}$ (C は任意定数).

187. 1 階線形

(1) $\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{2tx}{t^2+1}x=0\cdots$① について $\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t}{t^2+1}$. $\displaystyle\int\frac{dx}{x}=\int\frac{2t}{t^2+1}dt$. $\log|x|=\log|t^2+1|+c$.

$\log|x|-\log|t^2+1|=\log\left|\dfrac{x}{t^2+1}\right|=c$. $\dfrac{x}{t^2+1}=\pm e^c$. $\pm e^c=C$ とおくと①の一般解は $x=C(t^2+1)$.

$C=u$ (u は t の関数) とおくと $x=u(t^2+1)\cdots$②. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{du}{dt}(t^2+1)+2tu$. これと②を元の微分方程式に代入

して $\dfrac{du}{dt}(t^2+1)+2tu-\dfrac{2tu(t^2+1)}{t^2+1}=t^3+t$ より $\dfrac{du}{dt}=\dfrac{t^3+t}{t^2+1}=t$. よって $u=\dfrac{1}{2}t^2+C$.

②より $x=\dfrac{1}{2}t^2(t^2+1)+C(t^2+1)$. $t=0$ のとき $x=0$. よって $0=C$. 求める特殊解は $x=\dfrac{1}{2}(t^2+1)$.

(2) $\dfrac{dx}{dt}+2tx=0\cdots$① について $\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt}=-2t$. $\displaystyle\int\frac{dx}{x}=-\int 2tdt$. $\log|x|=-t^2+c$. $x=\pm e^{-t^2+c}=\pm e^ce^{-t^2}$.

$\pm e^c=C$ とおくと①の一般解は $x=Ce^{-t^2}$.

$C=u$ (u は t の関数) とおくと $x=ue^{-t^2}\cdots$②. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{du}{dt}e^{-t^2}+u\cdot(-2te^{t^2})$. これと②を元の微分方程式に代入

して $\dfrac{du}{dt}e^{-t^2}-2tue^{-t^2}+2tue^{-t^2}=2te^{-t^2}$. $\dfrac{du}{dt}=2t$ より $u=t^2+C$②より $x=(t^2+C)e^{-t^2}$.

$t=0$ のとき $x=1$ より $1=C$. よって求める特殊解は $x=(t^2+1)e^{t^2}$.