大日本図書　新線形代数問題集　1章§ 1 BASIC 詳しい解答

p.3. 1章§ 1. 平面のベクトル　BASIC

1. 解答参照

2. 解答参照

3. 折れ線でつなげればよい

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{PA_1}} + \overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}} + \overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}} + \overrightarrow{\mathrm{A_3Q}} = \vec{d} + (-\vec{b}) + (-\vec{c}) + \vec{a} = \vec{d} - \vec{b} - \vec{c} + \vec{a}.$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{PA_1}} + \overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}} + \overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}} + \overrightarrow{\mathrm{A_3Q}} = \vec{b} + (-\vec{d}) + (-\vec{c}) + \vec{a} = \vec{b} - \vec{d} - \vec{c} + \vec{a}.$

4. 解答参照

5. $-\vec{x} + 3\vec{x} = -\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{a} - \vec{b}$ より $2\vec{x} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$. よって $\vec{x} = -\dfrac{3}{2}\vec{a} + \vec{b}.$

6. 解答参照

7. (1) $2\vec{a} - \vec{b} = (-4, 6) - (1, -1) = (-5, 7)$. よって $\left|2\vec{a} - \vec{b}\right| = \sqrt{(-5)^2 + 7^2} = \sqrt{74}.$

(2) $\dfrac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} = \left(-1, \dfrac{3}{2}\right) + (1, -1) = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. よって $\left|\dfrac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{0 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2}.$

(3) $-\dfrac{1}{2}\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{b} = \left(1, -\dfrac{3}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}\right) = \left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{11}{6}\right)$. よって $\left|-\dfrac{1}{2}\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{b}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{4}{3}\right)^2 + \left(-\dfrac{11}{6}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{185}}{6}.$

8. (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -(1, -1) + (3, 1) = (2, 2)$. $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{BO}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} = -(3, 1) + (-1, 2) = (-4, 1)$. $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}.$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \overrightarrow{\mathrm{CO}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}} = -(-1, 2) + (1, -1) = (2, -3)$. $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}.$

9. $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} = -(-1, 0) + (x, y) = (x + 1, y), \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -(-1, 0) + (2, -1)$
$= (3, -1)$. よって $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より $(x+1, y) = k(3, -1)$ だから $x+1 = 3k, y = -k$, すなわち $x = 3k-1, y = -k \cdots$ ①.
また $\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = 20$ より $\left|k\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = |k|\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = 20$. $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ より $|k|\sqrt{10} = 20, |k| = \dfrac{20}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10}.$
従って $k > 0$ より $k = 2\sqrt{10}$. ①より $x = 6\sqrt{10} - 1, y = -2\sqrt{10}$. よって $C(6\sqrt{10} - 1, -2\sqrt{10})$.

10. (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 4 \times 2\cos\dfrac{\pi}{6} = 8 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 2 \times \sqrt{3}\cos\dfrac{3}{4}\pi = 2\sqrt{3} \times \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{6}.$

11. (1) AB を B の側に延長した線上に BD=AB$(= 2)$ となる点 D をとると $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{BD}}$ で, $\theta = \angle$CBD$= 90°$ だから
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{BD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\cos\theta = 2 \times 2\cos 90° = 0.$

(2) AC$= 2\sqrt{2}, \theta = \angle$BAC$= 45°$ より $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos\theta = 2 \times 2\sqrt{2}\cos 45° = 4\sqrt{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 4.$

(3) BC を C の側に延長した線上に CE=BC$(= 2)$ となる点 E をとると $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{CE}}$ で, $\theta = \angle$ACE$= 135°$ だから
$\overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \overrightarrow{\mathrm{CE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{CE}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|\cos\theta = 2 \times 2\sqrt{2}\cos 135° = 4\sqrt{2} \times \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -4.$

12. (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-2) + (-3) \cdot (-1) = 1.$　(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} + (-5) \cdot \sqrt{2} = 0.$

13. (1) $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}, |\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}, \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 10$. よって $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ より
$10 = \sqrt{10}\sqrt{20}\cos\theta = 10\sqrt{2}\cos\theta$. よって $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. $\theta = 45° = \dfrac{\pi}{4}.$

(2) $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}, \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) = -5$. よって $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ より
$-5 = \sqrt{5}\sqrt{10}\cos\theta = 5\sqrt{2}\cos\theta$. よって $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. $\theta = 135° = \dfrac{3}{4}\pi.$

(3) $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}, |\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}, \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) = -13$. よって $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$
より $-13 = \sqrt{13}\sqrt{13}\cos\theta = 13\cos\theta$. よって $\cos\theta = -1$. $\theta = 180° = \pi.$

(4) $|\vec{a}|=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{8+2\sqrt{3}}, |\vec{b}|=\sqrt{(1-\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{5-2\sqrt{3}}, \vec{a}\cdot\vec{b}=(1+\sqrt{3})\cdot(1-\sqrt{3})+2\cdot 1=0.$

よって $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ より $0=\sqrt{8+2\sqrt{3}}\sqrt{5-2\sqrt{3}}\cos\theta$. よって $\cos\theta=0$. $\theta=90^\circ=\dfrac{\pi}{2}$.

14. (1) 与式 $=2|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}-|\vec{b}|^2=2|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2=2(\sqrt{3})^2+1-(\sqrt{5})^2=2.$

(2) 与式 $=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4(\sqrt{3})^2+4\cdot 1+(\sqrt{5})^2=21.$

15. 平行四辺形より $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ だから $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$. よって $\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2$

$=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2=1^2+2\cdot 1\cdot 3\cos\dfrac{2}{3}\pi+3^2=1+6\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+9=7$. よって AC$=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=\sqrt{7}$.

16. 平行条件　$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{b}=m\vec{a}$ をみたす実数 m が存在する

(1) $(-3,k+5)=m(2,k)$ より $-3=2m, k+5=mk$. よって $m=-\dfrac{3}{2}, k+5=-\dfrac{3}{2}k$ より $k=-2$.

(2) $(k,k+4)=m(1,3)$ より $k=m, k+4=3m$. よって $k+4=3k$ より $k=2$.

17. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-(2,3)+(6,-7)=(4,-10), \overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{CO}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-(-1,k)+(k,2)$

$=(k+1,2-k)$. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\parallel\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=m\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ だから $(k+1,2-k)=m(4,-10)$. よって $k+1=4m, 2-k=-10m$.

これらを加えて $3=-6m, m=-\dfrac{1}{2}$. よって $k=4m-1=-3$.

18. $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|=2^2+2-2\cdot(\sqrt{3})^2=4+2-6=0$. よって垂直条件　$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ より

$(\vec{a}-\vec{b})\perp(\vec{a}+2\vec{b})$.

19. 垂直条件より $\vec{a}\cdot\vec{b}=2(k-1)-k=k-2=0$ より $k=2$.

20. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(k,2), \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-(9,-2)+(k,2)=(k-9,4)$. よって垂直条件より

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k(k-9)+2\cdot 4=k^2-9k+8=(k-1)(k-8)=0$. よって $k=1,8$.

21. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4+3}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{7}, \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4+3}=\dfrac{4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{7}$.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3(-3,5)+4(4,-9)}{7}=(1,-3), \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{4(-3,5)+3(4,-9)}{7}=(0,-1)$. よって P$(1,-3)$, Q$(0,-1)$.

22. $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}=\dfrac{(1,2)+(-2,-3)+(-1,4)}{3}=\left(-\dfrac{2}{3},1\right)$. よって G$\left(-\dfrac{2}{3},1\right)$.

23. (1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$. $\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{MO}}+\overrightarrow{\mathrm{ON}}=-\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{ON}}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}=\dfrac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}-\vec{a}$. よって (1) より $\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. よって $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\parallel\overrightarrow{\mathrm{MN}}$.

24. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-(1,0)+(4,-2)=(3,-2), \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-(1,0)+(-2,2)=$

$(-3,2)$. よって $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ だから A, B, C は同一直線上にある.

25. M は辺 BC の中点だから $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}$. $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. よって

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})=\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2}{2}$. AB=AC, すなわち $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|$ だから $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$.

よって $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, すなわち AM⊥BC.

26. (1) $x=1-3t, y=-1+2t$ (t は媒介変数).　(2) $x=3+2t, y=-2$ (t は媒介変数).

(3) 方向ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-(2,5)+(7,-3)=(5,-8)$.

よって $x=2+5t, y=5-8t$ (t は媒介変数).

27. 直線 $ax+by+c=0$ の法線ベクトルは $\vec{n}=(a,b)$.

(1) $(2,-3)$　(2) $7y=-2x-7\Rightarrow 2x+7y+7=0$ だから $(2,7)$

28. 直線 $ax+by+c=0$ と点 (x_0,y_0) との距離は $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

(1) $\dfrac{|-3\cdot 0+2\cdot 0+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{13}}$.　(2) $2x+y-3=0$ だから $\dfrac{|2\cdot(-3)+2-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{7}{\sqrt{5}}$.

29. (1) 方向ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-(0,1)+(5,-2)=(5,-3)$. よって $x=0+5t, y=1-3t$.

$t=\dfrac{x}{5}$ より $y=1-\dfrac{3}{5}x$. よって $5y=5-3x$ から $3x+5y-5=0$.

(2) $\dfrac{|3\cdot 3+5\cdot 4-5|}{\sqrt{3^2+5^2}}=\dfrac{24}{\sqrt{34}}$.

(3) AB$=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{5^2+(-3)^2}=\sqrt{34}$. AB を底辺とするときの高さは (2) より $\dfrac{24}{\sqrt{34}}$ だから面積は

$\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{34}\cdot\dfrac{24}{\sqrt{34}}=12$.

30. (1) $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ とおくと $(1,2)=m(-1,2)+n(1,-1)=(-m+n,2m-n)$. よって $-m+n=1\cdots$①$, 2m-n=2\cdots$②.

① + ② より $m=3$. ① $\times 2+$ ② より $n=4$. よって $\vec{c}=3\vec{a}+4\vec{b}$.

(2) $\vec{d}=m\vec{a}+n\vec{b}$ とおくと $(-3,5)=m(-1,2)+n(1,-1)=(-m+n,2m-n)$. よって $-m+n=-3\cdots$①,

$2m-n=5\cdots$②. ① + ② より $m=2$. ① $\times 2+$ ② より $n=-1$. よって $\vec{d}=2\vec{a}-\vec{b}$.

31. $\vec{a},\vec{b}$ が線型独立なら $m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow m=n=0$

(1) $2x\vec{a}+(-y+1)\vec{b}+4\vec{a}-2\vec{b}=(2x+4)\vec{a}+(-y-1)\vec{b}=\vec{0}$. よって $2x+4=-y-1=0$. 従って $x=-2, y=-1$.

(2) 同様にして $(x+2y+1)\vec{a}+(x-y-2)\vec{b}=\vec{0}$. よって $x+2y+1=0\cdots$①$, x-y-2=0\cdots$②.

① + ② $\times 2$ より $3x-3=0$. よって $x=1$. ① − ② より $3y+3=0$. よって $y=-1$.

32. $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とすると $\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\dfrac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5},\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$. P は OL 上にあるから $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\dfrac{2s\vec{a}+3s\vec{b}}{5}$

$=\dfrac{2}{5}s\vec{a}+\dfrac{3}{5}s\vec{b}$ (s は実数)$\cdots$①.

P は AM 上にあるから $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+t\overrightarrow{\mathrm{MA}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+t(\overrightarrow{\mathrm{MO}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}})=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+t(-\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}})$

$=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OM}}=t\vec{a}+\dfrac{1-t}{2}\vec{b}$ (t は実数)$\cdots$②. $\vec{a},\vec{b}$ は線型独立だから①②より

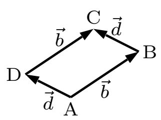
$\dfrac{2}{5}s=t\cdots$③$, \dfrac{3}{5}s=\dfrac{1-t}{2}\cdots$④. ③ + ④ $\times 2$ より $\dfrac{8}{5}s=1, s=\dfrac{5}{8}$. よって $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2}{8}\vec{a}+\dfrac{3}{8}\vec{b}=\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{8}\vec{b}$.

従って $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{8}\vec{b}=-\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{8}\vec{b}$,

$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\overrightarrow{\mathrm{PO}}+\overrightarrow{\mathrm{OM}}=-\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OM}}=-\left(\dfrac{1}{4}\vec{\mathrm{a}}+\dfrac{3}{8}\vec{b}\right)+\dfrac{1}{2}\vec{b}=-\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{8}\vec{b}$. よって $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=3\overrightarrow{\mathrm{PM}}$, AP : PM$=3:1$.

p.6. CHECK

33. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\vec{b},\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{d}$ だから



(1) $\overrightarrow{\mathrm{CB}}=-\overrightarrow{\mathrm{BC}}=-\vec{d}$.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})=-\vec{b}-\vec{d}$.

(3) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\vec{d}-\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\vec{d}-\vec{b}$.

34. 与式より $-\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{a}-4\vec{x}=\vec{x}+2\vec{a}-\vec{b}\Rightarrow -5\vec{x}=-\vec{a}+\vec{b}$. よって $\vec{x}=\dfrac{1}{5}\vec{a}-\dfrac{1}{5}\vec{b}$

35. (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-(2,-3)+(-1,1)=(-3,4)$. $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{25}=5$.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$: 単位ベクトルより $\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=1$. よって (1) より $\left|k\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=|k|\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=5|k|=1$. $k>0$ より $k=\dfrac{1}{5}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-(2,-3)+(x,y)=(x-2,y+3)$. (1) より $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{5}(-3,4)$.

よって $x-2=-\dfrac{3}{5}, y+3=\dfrac{4}{5}$ より $x=\dfrac{7}{5}, y=-\dfrac{11}{5}$. 従って $C\left(\dfrac{7}{5},-\dfrac{11}{5}\right)$.

36. (1) 与式 $=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=2^2+1-2\cdot 3^2=-13$. (2) 与式 $=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=2^2+2\cdot 1+3^2=15$.

37. (1) $\vec{a}\mathbin{/\!/}\vec{b}\Rightarrow\vec{b}=m\vec{a}$ より $(-1,k)=m(2,1)$. よって $-1=2m, k=m$. 従って $k=m=-\dfrac{1}{2}$.

(2) $\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ より $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-1)+1\times k=k-2=0$. よって $k=2$.

38. (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2+1}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}$. よって $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{(1,-1)+2(-2,1)}{3}=\left(-1,\dfrac{1}{3}\right)$. $P\left(-1,\dfrac{1}{3}\right)$.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}=\dfrac{(1,-1)+(-2,1)+(0,4)}{3}=\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{3}\right)$. $G\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{3}\right)$.

39. 3 点 A, B, C が同一直線上にある $\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{AB}} \parallel \overrightarrow{\mathrm{AC}} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{AC}} = m\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -(-2, 0) + (-4, -1) = (-2, -1)$,

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} = -(-2, 0) + (0, 1) = (2, 1)$. よって

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = -\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. 従って $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \parallel \overrightarrow{\mathrm{AC}}$. よって 3 点 A, B, C は同一直線上にある.

40. $x = 1 + 2t, y = 2 - t$ (t は媒介変数).

41. (1) $(-1, 2)$.　(2) $d = \dfrac{|-(-1) + 2 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

42. $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ とおくと $(-1, 3) = m(2, 1) + n(1, 2) = (2m + n, n + 2m)$. よって $2m + n = -1 \cdots ①, m + 2n = 3 \cdots ②$.

② $\times 2 -$ ① より $3n = 7, n = \dfrac{7}{3}$. ②より $m = -\dfrac{5}{3}$. よって $\vec{c} = -\dfrac{5}{3}\vec{a} + \dfrac{7}{3}\vec{b}$.

43. 等式より $2\vec{a} + x\vec{a} - 3\vec{b} - y\vec{a} + (2 - x)\vec{b} = (2 + x - y)\vec{a} + (-1 - x)\vec{b} = \vec{0}$. $\vec{a}, \vec{b}$ は線形独立だから

$2 + x - y = 0 \cdots ①, -1 - x = 0 \cdots ②$. ②より $x = -1$. よって①より $y = 1$. 従って $x = -1, y = 1$.

44. $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とすると $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}, \overrightarrow{\mathrm{ON}} = \dfrac{1}{3}\vec{a}$.

P は OM 上にあるから $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{s}{2}\vec{a} + \dfrac{s}{2}\vec{b}$ (s は実数) $\cdots ①$.

P は BN 上にもあるから $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{ON}} + \overrightarrow{\mathrm{NP}} = \dfrac{1}{3}\vec{a} + t\overrightarrow{\mathrm{NB}} = \dfrac{1}{3}\vec{a} + t(\overrightarrow{\mathrm{NO}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = \dfrac{1}{3}\vec{a} + t(-\overrightarrow{\mathrm{ON}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$= \dfrac{1}{3}\vec{a} + t(-\dfrac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}) = \dfrac{1}{3}(1 - t)\vec{a} + t\vec{b}$ (t は実数) $\cdots ②$.

①②より $\dfrac{s}{2}\vec{a} + \dfrac{s}{2}\vec{b} = \dfrac{1}{3}(1 - t)\vec{a} + t\vec{b}$. $\vec{a}, \vec{b}$ は線形独立だから $\dfrac{s}{2} = \dfrac{1}{3}(1 - t) \cdots ③, \dfrac{s}{2} = t \cdots ④$.

③ $\times 3 +$ ④ より $2s = 1, s = \dfrac{1}{2}$. ④より $t = \dfrac{1}{4}$. よって①より $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$. 従って $OP : PM = 1 : 1$.