p.7. 1 章§ 1. 平面のベクトル　STEP UP

45. (1) $|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=(2\sqrt{13})^2=52$. よって $4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=4\cdot1^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9\cdot2^2=52$. $-12\vec{a}\cdot\vec{b}=52-4\cdot1^2-9\cdot2^2=12$.

よって $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$.

(2) (1) より $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=1\cdot2\cos\theta=-1$ (θ は $\vec{a},\vec{b}$ のなす角). よって $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$. 従って $\theta=120^\circ=\dfrac{2}{3}\pi$.

46. (1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}$. よって $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}$. 従って $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}$.

$\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AM}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{2}$.

(2) (1) より右辺 $=2\left(\left|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}\right|^2+\left|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{2}\right|^2\right)=2\cdot\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2}{4}$

$=\dfrac{2\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2}{2}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2=$ 左辺//

47. (1) 等式より $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}$. よって線分 AB を 2 : 1 の比に内分する点.

(2) 等式より $\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{BO}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{0}$. よって $2\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\overrightarrow{\mathrm{AO}}-\overrightarrow{\mathrm{BO}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$.

よって線分 AB の中点.

(3) 等式より $2(\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})+3(\overrightarrow{\mathrm{BO}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\vec{0}$. よって $5\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-2\overrightarrow{\mathrm{AO}}-3\overrightarrow{\mathrm{BO}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5}$.

よって線分 AB を 3 : 2 の比に内分する点.

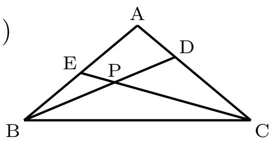
(4) 等式より $3(\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})+2(\overrightarrow{\mathrm{BO}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})+6(\overrightarrow{\mathrm{PO}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}})=\vec{0}$. $3(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})+2(-\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})+6(-\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}})=\vec{0}$.

よって $3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}-4\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{0}$. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4}$. 従って線分 AB を 1 : 3 の比に内分する点.

48. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ であればよい. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-(-4,-1)+(2,2)=(6,3)$. $\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{DO}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$=-\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-(x,y)+(4,5)=(4-x,5-y)$. よって $6=4-x, 3=5-y$ より $x=-2, y=2$.

49. (1)



$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. D は線分 AC 上にあるので $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (s は実数)$\cdots$①

D は BP の延長線上にあるので $\overrightarrow{\mathrm{BD}}=t\overrightarrow{\mathrm{BP}}=t(\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}})=t(-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}})$ (t は実数).

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t(-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\left(-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$.

よって $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\left(1-\dfrac{3}{5}t\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{t}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdots$②. $\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は線形独立だから①②より $1-\dfrac{3}{5}t=0, \dfrac{t}{5}=s$.

よって $t=\dfrac{5}{3}, t=\dfrac{1}{3}$. 従って AD : DC= 1 : 2.

同様に E は線分 AB 上にあるので $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=u\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (u は実数)$\cdots$③. E は CP の延長線上にあるので $\overrightarrow{\mathrm{CE}}=v\overrightarrow{\mathrm{CP}}$

$=v(\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}})=v(-\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}})$ (v は実数). $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+v(-\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}})$

$=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+v\left(-\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$. よって $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{2}{5}v\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(1-\dfrac{4}{5}v\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdots$④. $\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は線形独立だから

③④より $1-\dfrac{4}{5}v=0, \dfrac{2}{5}v=u$. よって $t=\dfrac{5}{4}, t=\dfrac{1}{2}$. 従って AE : EB= 1 : 1.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}, \overrightarrow{\mathrm{AJ}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}, \overrightarrow{\mathrm{AK}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}}{2}$. よって $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. (1) より $\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\dfrac{\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{2}$

$=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. よって, $\overrightarrow{\mathrm{FJ}}=\overrightarrow{\mathrm{FA}}+\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=\overrightarrow{\mathrm{AJ}}-\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{10}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{FK}}=\overrightarrow{\mathrm{FA}}+\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\overrightarrow{\mathrm{AK}}-\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{10}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{20}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{15}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. 従って $\overrightarrow{\mathrm{FJ}}=6\overrightarrow{\mathrm{FK}}$. よって

FJ//FK より F, J, K は同一直線上にある.

50. (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{-2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 5\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5-2} = \dfrac{-2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 5\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}$. A$(1,3)$, B$(4,-2)$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{-2(1,3)+5(4,-2)}{3} = \left(6, -\dfrac{16}{3}\right)$.

よって P$\left(6, -\dfrac{16}{3}\right)$.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{-4\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3-4} = 4\overrightarrow{\mathrm{OA}} - 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$. A$(1,3)$, B$(4,-2)$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 4(1,3) - 3(4,-2) = (-8, 18)$.

よって Q$(-8, 18)$.

51. 例題より $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|} + \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}\right)$ (t は実数). $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = 3, \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = 2$ より $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{t}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{t}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdots$①.

P は線分 AB 上にあるから $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (s は実数).

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s(\overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdots$②.

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は線型独立だから①②より $\dfrac{t}{3} = 1-s, \dfrac{t}{2} = s$. よって $\dfrac{t}{3} + \dfrac{t}{2} = \dfrac{5}{6}t = 1 - s + s = 1$ より

$t = \dfrac{6}{5}, s = \dfrac{3}{5}$. よって AP : PB$= 3:2$.

52. (1) 例題の k は $k = s+t$ だから条件式より $0 < k = s+t < \dfrac{1}{2}$. 従って OA, OB の中点をそれぞれ A$'$, B$'$ とすると

P は $\triangle$OA$'$B$'$ の内部.

(2) 考え方 条件式 $0 < 2s+t < 1$ より逆に $2s+t = k$, すなわち $2s = \dfrac{kn}{m+n}, t = \dfrac{km}{m+n}$ とすると $s = \dfrac{kn}{2(m+n)}$.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \dfrac{n}{2(m+n)}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \dfrac{n \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}$. よって

答 A$'$ を線分 OA の中点とすると $\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$. 直線 OP と線分 A$'$B との交点を Q とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{n\overrightarrow{\mathrm{OA'}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n} = \dfrac{n \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}$. $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ (k は実数) と表されるから $s = \dfrac{nk}{2(m+n)}, t = \dfrac{mk}{m+n}$.

これから $2s + t = k$. よって $s > 0, t > 0, 0 < 2s+t < 1$ より $m > 0, n > 0, 0 < k < 1$.

従って P は $\triangle$OA$'$B の内部.